

Teil A

7. Kinematik auf dem Gummiband

5 Pkt.

Ein extrem langes, unendlich elastisches, homogenes Gummiband der Ruhelänge \mathcal{L}_0 wird durch eine ab einem Zeitpunkt $t = t_0$ angreifende externe Kraft gedehnt. Die Dehnung ϵ lässt sich als Funktion der Zeit angeben und sei homogen:

$$\epsilon(t) = \frac{\Delta\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}_0}.$$

Für die aktuelle Länge des Gummibandes gilt folglich

$$\mathcal{L}(t) = L_0 + \Delta\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_0 = \underbrace{(1 + \epsilon)}_{:=a(t)} \mathcal{L}_0,$$

den hier definierten Faktor $a(t)$ nennen wir Skalenfaktor. Da das Gummiband zur Zeit t_0 seine Ruhelänge hatte, gilt offenbar $a(t_0) = 1$.

Hinweis: Es ist günstig, ein auf dem Gummiband angebrachtes und mit diesem expandierendes Koordinatensystem einzuführen. Beachten Sie dabei, dass sich die Abstände der Koordinatenmarkierungen des mitbewegten Systems ändern.

- (a) Auf dem Gummiband seien zwei Punkte farbig markiert. Diese haben zu einer Zeit $t_1 \geq t_0$ den Abstand L . Geben Sie einen Ausdruck für die Relativgeschwindigkeit des einen Punkte bzgl. des anderen an, der nur von $a(t)$, $\dot{a}(t)$ und L abhängt. (2 Pkt.)
- (b) Nehmen Sie nun an, dass der Skalenfaktor linear mit der Zeit wächst, es gelte $a(t) = \mu t$. Stellen Sie sich vor, Sie stehen auf dem Gummiband und im Abstand L von Ihnen befindet sich ein Auto auf dem Gummiband, das mit seiner Höchstgeschwindigkeit c (relativ zum Gummiband) auf sie zu rast. Geben Sie die Entfernung zwischen sich selbst und dem Auto als Funktion der Zeit an. Können Sie sich in Sicherheit wiegen, wenn L hinreichend groß ist? Falls Sie nicht in Sicherheit sind, können Sie dem Auto durch Weglaufen mit einer Geschwindigkeit $v < c$ entkommen? (2 Pkt.)
- (c) Die Kinematik auf dem Gummiband entspricht im wesentlichen der Kinematik eines expandierendem Universums. Gilt dies auch für die Dynamik (nach Newton) auf dem Gummiband? Gilt insbesondere Homogenität und Isotropie des „Raums“ auf dem Gummiband? (1 Pkt.)

Lösung:

- (a) Wir definieren zwei Koordinatensysteme, eines, das auf dem Gummiband angebracht ist und dessen Markierungen sich mit dem Gummiband mitbewegen, und eines, das ein externer Beobachter außerhalb des Gummibandes nutzt, mit festen Koordinatenmarkierungen. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ seien beide Systeme identisch. Mit X sei die Koordinate eines Punktes im externen Beobachtersystem und mit x die Koordinate desselben Punktes auf in dem Gummibandsystem bezeichnet. Offenbar gilt:

$$X = a(t)x.$$

Betrachten wir nun zwei Punkte x_1 und x_2 (o.B.d.A. $x_2 > x_1$), die auf dem Gummiband fest sind, gilt für deren Abstand L :

$$L = X_2 - X_1 = a(x_2 - x_1).$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Punkte voneinander entfernen ist demnach:

$$\dot{L} = \dot{a}(x_2 - x_1) = \frac{\dot{a}}{a}a(x_2 - x_1) = \frac{\dot{a}}{a}L \quad (7.1)$$

Zwei Punkte auf dem Gummiband entfernen sich demnach um so schneller, je weiter sie voneinander entfernt sind, der Proportionalitätsfaktor

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

ist das Gummiband-Analogon zum Hubble-Parameter (bzw. zur Hubble-„Konstante“), den man in einem expandierendem Universum messen kann.

- (b) Der Punkt des Gummibandes, bei dem sich das Auto in der Entfernung L vom Beobachter befindet, bewegt sich aufgrund der Expansion des Gummibandes mit der Geschwindigkeit (7.3) von ihm/ihr fort, relativ zu seinem Standort auf dem Gummiband bewegt sich das Auto mit c auf den Beobachter zu, es hat demnach in Bezug zu dessen Standort die resultierende Geschwindigkeit:

$$\dot{L} = v_{res} = \frac{\dot{a}}{a}L - c$$

Setzen wir $a(t) = \mu t$ ein, erhalten wir:

$$\dot{L} = v_{res} = \frac{1}{t}L - c$$

Wir lösen zunächst den homogenen Teil der Differentialgleichung:

$$\dot{L}_h = v_{res} = \frac{1}{t}L_h$$

dieser hat die Lösung:

$$L_h(t) = k t$$

Mit der Integrationskonstante k . Durch Variation der Konstanten finden wir:

$$L(t) = \left[\frac{L(t_s)}{t_s} - c \ln \left(\frac{t}{t_s} \right) \right] t, \quad (7.2)$$

wobei t_s der Startzeitpunkt ist. Auf den ersten Blick scheint es erstaunlich zu sein, dass das Resultat gar nicht von μ abhängt. Man kann sich aber leicht überlegen, dass unterschiedliche Werte von μ lediglich einer Verschiebung des Zeitpunktes t_0 entsprechen bei dem $a(t) = 1$ gilt. Diesen Zeitpunkt kann man aber frei wählen, indem man das Gummibandkoordinatensystem entsprechend wählt. Physikalisch messbare Größen können aber nicht von dieser Wahl abhängen, deshalb darf die Konstante μ in diesen auch nicht auftreten.

Da der erste Term in den eckigen Klammern konstant ist, der Subtrahend aber monoton anwächst, gibt es einen Zeitpunkt, zu dem gilt $L(t) = 0$. Man kann sich also nicht in Sicherheit wiegen, wenn dieser Zeitpunkt noch innerhalb der eigenen Lebensdauer liegt.

Weglaufen mit einer konstanten Geschwindigkeit v führt zur Bewegungsgleichung

$$\dot{L} = \frac{\dot{a}}{a}L - c + v, \quad (7.3)$$

das heißt, es ist in der Lösung einfach c durch $c - v$ zu ersetzen. Weglaufen hilft – bei unendlicher Lebensdauer – nur dann, wenn $v \geq c$, man also mindestens so schnell laufen kann, wie das Auto fährt. In einer Welt, in der praktische Erwägungen wie eine endliche Lebensdauer eine Rolle spielen, kann es aber durchaus hilfreich sein, denn in die Zeit bis zum Crash, $t^* = t_s \exp\left(\frac{L(t_s)}{t_s(c-v)}\right)$, geht $c - v$ exponentiell ein, sie kann also durch $v > 0$ substantiell vergrößert werden.

- (c) Nein, jeder Punkt des Gummibandes außer einem ist beschleunigt, es wirken Trägheitskräfte, die Analogie hat hier ihre Grenzen.

Anmerkung: Aufgrund der Diskussion in einer früheren Übung folgen hier noch einige klärende Bemerkungen.

Man kann leicht in folgenden *Denkfehler* verfallen: Man selbst befindet sich am Koordinatenursprung, das Auto befindet sich anfangs in der Entfernung L_0 von mir. Da sich alles linear ausdehnt, ist die Entfernung zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$L(t) = a(t)L_0 \quad (7.4)$$

und damit ist die Geschwindigkeit des Autos, wenn es selber nicht fährt, $\dot{L} = \dot{a}L_0$. Dies ist aber im Allgemeinen falsch!

Das Auto hat zu einem bestimmten Zeitpunkt t_s die Entfernung L_0 vom Koordinatenursprung, aber es ist *nicht* möglich, $t_s = 0$ festzulegen, da $a(0) = 0$ gilt (für unsere Wahl von $a(t)$) und somit alle Entfernungen kollabieren und alle Markierungen auf dem Gummiband auf einen Punkt zusammenfallen würden. (was natürlich bei einem echten Gummiband nicht möglich ist). Für jeden Zeitpunkt $t_s > 0$ kann man jedoch eine Entfernung angeben. Drückt man diese mit den Gummibandmarkierungen aus gilt

$$L_0 = L(t_s) = a(t_s)x, \quad (7.5)$$

wobei x die Gummibandkoordinate des Autos darstellt. Die Entfernung des Autos zum Koordinatenursprung ist dann als Funktion der Zeit:

$$L(t) = a(t)x. \quad (7.6)$$

Drücken wir x mittels (7.5) durch L_0 aus erhalten wir:

$$L(t) = L_0 \frac{a(t)}{a(t_s)} = L_0 \frac{t}{t_s},$$

was mit (7.4) nur dann übereinstimmt, wenn $t_s = t_0$ (denn dann ist $a(t_s) = 1$). Das Ergebnis stimmt aber mit Gleichung (7.2) für $c = 0$ überein, wie es sein muss. Leiten wir die Gleichung nach der Zeit ab, erhalten wir:

$$\dot{L}(t) = L_0 \frac{\dot{a}(t)}{a(t_s)} = \frac{L_0}{t_s}.$$

Das ist die Zeitentwicklung der Geschwindigkeit des (lokal stehenden) Autos. Gesucht ist die Geschwindigkeit zu Zeitpunkt t_s , womit wir wieder bei Gleichung (7.3) angekommen sind. (Bei unserem Zeitgesetz für den Skalenfaktor $a(t)$ ist diese Geschwindigkeit auch noch zeitlich konstant.)

Ebenso kann man leicht einen Fehler machen, wenn man die Geschwindigkeit des Autos berücksichtigt. Der Punkt des Gummibandes an der Gummibandmarkierung x bewegt sich mit $\dot{a}x$ von mir weg. Die Geschwindigkeit des Autos auf mich zu ist also

$$v = \dot{X} = \dot{a}x - c.$$

Wenn man nicht so genau hinschaut, könnte man denken, dass auf der rechten Seite eine ausschließlich über \dot{a} von der Zeit abhängige Funktion steht. Dies stimmt aber nicht, denn dadurch, dass sich das Auto relativ zum Gummiband bewegt, ist dessen Gummibandkoordinate x eine Funktion der Zeit. Um die Gleichung zu schließen, müssen wir entweder alles in den Gummibandkoordinaten oder alles in den externen Koordinaten ausdrücken. Wir rechnen im Folgenden beide Varianten durch.

Wir nutzen $x(t) = X(t)/a(t)$ und kommen so auf die geschlossene Gleichung:

$$\dot{X}(t) = \frac{\dot{a}}{a}X(t) - c,$$

die natürlich (7.6) entspricht und schon gelöst wurde.

Alternativ kann man auch X in der Gleichung ersetzen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ax) &= \dot{a}x - c \\ \dot{a}x + a\dot{x} &= \dot{a}x - c \\ \dot{x} &= -\frac{c}{a} = -\frac{c}{\mu t} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Das können wir nun einfach integrieren:

$$x(t) - x(t_s) = -\frac{c}{\mu} \int_{t_s}^t d\tilde{t} \tilde{t}^{-1}$$

wir finden:

$$x(t) = x(t_s) - \frac{c}{\mu} \ln\left(\frac{t}{t_s}\right)$$

Dies ist mitexpandierende Koordinate des Autos. Die Entfernung ist die Koordinate im externen System, wir ersetzen $x(t) = X(t)/(\mu t)$ und $x(t_s) = X(t_s)/\mu t_s$ und finden:

$$X(t) = t \left[\frac{X(t_s)}{t_s} - c \ln\left(\frac{t}{t_s}\right) \right].$$

was dem Ergebnis aus Aufgabenteil b) entspricht.

8. Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors - Teil 2

4 Pkt.

In der Aufgabe „Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors“ wurden die folgen-

den Symmetrierelationen bewiesen

$$R_{iklm} = -R_{ikml}, \quad R_{iklm} = -R_{kilm}, \quad R_{iklm} = R_{lmik}, \quad R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0 \quad (8.1)$$

- (a) Benützen Sie die Symmetrien, um die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors in zwei, drei und vier Dimensionen zu bestimmen. (3 Pkt.)
- (b) Zeigen Sie, dass der Ricci-Tensor $R_{kl} = R^i_{kli}$ symmetrisch ist. (1 Pkt.)

Lösung:

- (a) Sei n die Dimension des betrachteten Raumes. Dann folgt aus der ersten Gleichung von (8.1), dass die $n \times n$ -Matrix, die man erhält, wenn man die ersten beiden Indizes des Riemann-Tensors festhält, antisymmetrisch ist. Eine antisymmetrische Matrix in n Dimensionen hat $n(n-1)/2$ unabhängige Komponenten.

Aus der zweiten Gleichung von (8.1) folgt, dass R_{iklm} auch bezüglich des ersten Indexpaares antisymmetrisch ist. Wir können uns den Tensor also als eine große Matrix vorstellen, bei der das Indexpaar (ik) die Zeilen, das Paar (lm) die Spalten nummeriert, und wir haben je $n(n-1)/2$ Zeilen und Spalten.

Diese große Matrix ist wegen der dritten Gleichung in (8.1) *symmetrisch*, die Anzahl ihrer unabhängigen Elemente ist $m(m+1)/2$ mit $m = n(n-1)/2$. Gäbe es keine weiteren Einschränkungen, hätten wir

$$N'_u = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right] = \frac{n^2(n-1)^2}{8} + \frac{n(n-1)}{4}$$

unabhängige Elemente (1 für $n=2$, 6 für $n=3$, 21 für $n=4$).

Wir haben aber durch die Symmetrie der letzten Gleichung von (8.1) möglicherweise noch weitere Einschränkungen. Wieviele?

Zunächst einmal macht man sich klar, dass diese vierte Gleichung aus den drei ersten *folgt*, wenn zwei der Indizes gleich sind.

Sei etwa $i = k = \alpha$ (über doppelte griechische Indizes wird im Folgenden nicht summiert). Dann ist

$$R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = \overset{0}{R_{\alpha\alpha lm}} + R_{\alpha l m \alpha} + R_{\alpha m \alpha l} = R_{\alpha l m \alpha} + R_{\alpha l \alpha m} = 0,$$

wobei das Verschwinden des Terms mit zwei gleichen führenden Indizes aus der passenden Antisymmetrie folgt. Dies haben wir jedoch bereits ausgenutzt.

$$\text{Analog: } \overset{0}{R_{i k \alpha \alpha}} + R_{i \alpha \alpha k} + R_{i \alpha k \alpha} = 0.$$

Damit sind schon alle Möglichkeiten abgedeckt. Denn ist einer der beiden gleichen Indizes der Index i , der seine Position nicht ändert, kann man durch zyklische Vertauschung von klm immer erreichen, dass der zweite gleiche Index an Position zwei gelangt. Sind beide gleichen Indizes in der Gruppe der zyklisch vertauschten Indizes, lässt sich durch eine zyklische Vertauschung immer erreichen, dass die beiden gleichen Indizes an Position zwei und drei stehen. Damit liegt immer eine der beiden betrachteten Möglichkeiten vor. Ist also ein Paar von Indizes gleich, liefert die letzte Symmetrie nichts Neues und stellt keine Einschränkung dar.

Damit sie eine Einschränkung liefert, müssen alle 4 Indizes verschieden sein. Für $n = 2$ und $n = 3$ kann man nur aus einer Menge aus 2 bzw. 3 Indizes wählen. Dann ist es nicht möglich 4 verschiedene Indizes zu wählen. Also liefert unser bisheriges Ergebnis bereits die Zahl der unabhängigen Komponenten von R_{iklm} . Für $n = 4$ gibt es genau *eine* Möglichkeit, die vier Indizes bis auf Permutationen verschieden zu wählen.

Man kann mithilfe der drei ersten Symmetrien jeden der vier Indizes an die erste Stelle bewegen. Die zyklische Vertauschung und die Möglichkeit, die letzten beiden Indizes mittels der letzten Symmetrie zu vertauschen, macht alle Vierer-Permutationen von Indizes ausgehend von $(iklm)$ erreichbar. Das heißt jede Klasse von Permutationen vier verschiedener Indizes liefert genau eine Einschränkung. Im Fall $n = 4$ reduziert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten von R_{iklm} also um eins. Für allgemeines n reduziert sie sich um die Anzahl der möglichen Kombinationen von vier verschiedenen aus n Elementen, also um $\binom{n}{4}$.

Folglich ist die Gesamtzahl N_u der unabhängigen Komponenten des Riemann-Tensors in n Dimensionen:

$$\begin{aligned} N_u &= N'_u - \binom{n}{4} = \frac{n^2(n-1)^2}{8} + \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\ &= \frac{n(n-1)}{24} (3n(n-1) + 6 - (n-2)(n-3)) \\ &= \frac{n(n-1)}{24} (2n^2 + 2n) = \frac{1}{12} n(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

Der (kovariante) riemannsche Krümmungstensor hat also

$$N_u = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \quad (8.2)$$

unabhängige Komponenten ($n = 2: N_u = 1, n = 3: N_u = 6, n = 4: N_u = 20, n = 5: N_u = 50$).

$$(b) R_{kl} = R^i{}_{kli} = g^{im} R_{mkli} = g^{im} R_{limk} = g^{im} R_{ilk m} = R^m{}_{lkm} = R_{lk}$$

9. Metrik-Bestimmungen

7 Pkt.

Ist der Ortsvektor \mathbf{r} im n -dimensionalen Raum als Funktion eines Satzes von unabhängigen (krummlinigen) Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n gegeben

$$\mathbf{r} = \sum_i q_i \mathcal{E}_{q_i},$$

so erhält man die *Koordinatenbasis* durch Bilden der partiellen Ableitungen nach den q_i :

$$\mathcal{E}_{q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Eine dazu *reziproke* Basis ist durch

$$\mathcal{E}^{q_i} = \nabla q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gegeben, wobei der Gradient im betreffenden n -dimensionalen Raum zu nehmen ist. Jeder Vektor A des Raumes kann gemäß

$$A = \sum_{i=1}^n A^i \mathcal{E}_{q_i} = \sum_{i=1}^n A_i \mathcal{E}^{q_i}$$

als Linearkombination ausgedrückt werden, wobei man die $A^i (= \mathcal{E}^{q_i} \cdot A)$ *kontravariante* Komponenten des Vektors nennt und die $A_i (= A \cdot \mathcal{E}_{q_i})$ als seine *kovarianten* Komponenten bezeichnet. Basis und reziproke Basis bilden ein *Biorthogonalsystem*.

Die Komponenten des metrischen Tensors sind gegeben durch

$$g_{ij} = \mathcal{E}_{q_i} \cdot \mathcal{E}_{q_j}$$

und die des inversen Metriktensors durch

$$g^{ij} = \mathcal{E}^{q_i} \cdot \mathcal{E}^{q_j} . \quad (*)$$

- (a) Leiten Sie Koordinatenbasis und Metriktensor für die Oberfläche einer Kugel mit Radius R in Kugelkoordinaten ϑ, φ ab. (2 Pkt.)
- (b) Die reziproke Basis ist hier (2 Pkt.)

$$\mathcal{E}^\vartheta = \nabla_s \vartheta, \quad \mathcal{E}^\varphi = \nabla_s \varphi,$$

wobei ∇_s den Gradienten auf der Kugeloberfläche, den *Oberflächengradienten*, kennzeichnet. In unserem Fall ist er berechenbar durch $\nabla_s = \nabla - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r \cdot \nabla)$ (wobei $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$). Bestimmen Sie die reziproke Basis und verifizieren Sie, dass der inverse Metriktensor die Relation (*) erfüllt.

- (c) Eine Kegelmantelfläche kann parametrisiert werden durch (3 Pkt.)

$$\mathbf{r} = r \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \alpha \mathbf{e}_z, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Hier ist α der Öffnungswinkel des Kegels, also konstant. Die Variablen sind r und φ . Bestimmen Sie eine Koordinatenbasis auf dem Kegelmantel und die Metrik. Zeigen Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation, dass die Metrik einen flachen Raum beschreibt (d.h., dass die Krümmung verschwindet).

Anmerkung: Wenn Sie keine geeignete Koordinatentransformation finden, können Sie auch den riemannschen Krümmungstensor berechnen, um das zu beweisen. Aber die Koordinatentransformation sollte der schnellere Weg sein.

Lösung:

- (a) Der dreidimensionale Ortsvektor auf der Kugeloberfläche ist

$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_r = R (\cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z) .$$

Die zweite Form ist praktischer für die Berechnung von Ableitungen, da die kartesische Basis konstant ist, also nichts zur Ableitung beiträgt. Natürlich können Ableitungen auch in der ersten Form berechnet werden, allerdings muss man dann die partiellen Ableitungen von \mathbf{e}_r nach ϑ und φ kennen.

Die Basisvektoren der Koordinatenbasis sind

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = R (\cos \varphi \cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \varphi \cos \vartheta \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z) \quad (= R \mathbf{e}_\vartheta),$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R (-\sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_x + \cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{e}_y) \quad (= R \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi).$$

Diese Vektoren sind tangential zur Kugeloberfläche, haben also keine Komponente in Richtung \mathbf{e}_r .

Die Komponenten des Metriktensors ergeben sich zu

$$g_{\vartheta\vartheta} = \mathcal{E}_\vartheta \cdot \mathcal{E}_\vartheta = R^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \mathcal{E}_\varphi \cdot \mathcal{E}_\varphi = R^2 \sin^2 \vartheta,$$

$$g_{\vartheta\varphi} = \mathcal{E}_\vartheta \cdot \mathcal{E}_\varphi = 0 = g_{\varphi\vartheta}.$$

$$\mathbf{g} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

- (b) Der einfachste Weg besteht bei dieser Teilaufgabe in der Verwendung von Kugelkoordinaten. Der Gradient ist gegeben durch:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \cdot \nabla) = \mathbf{e}_r \partial_r$$

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \cdot \nabla) = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi.$$

Auf der Kugeloberfläche ist $r = R$

$$\curvearrowright \mathcal{E}^\vartheta = \nabla_s \vartheta = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\vartheta \partial_\vartheta \vartheta = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\vartheta,$$

$$\mathcal{E}^\varphi = \nabla_s \varphi = \frac{1}{R \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi \varphi = \frac{1}{R \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi.$$

Damit ergibt sich für die kontravarianten Elemente der Metrik

$$g^{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta}, \quad g^{\vartheta\varphi} = g^{\varphi\vartheta} = 0.$$

In Matrixform

$$(g^{ij}) = \mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Man könnte hier als Problem sehen, dass die Verwendung des Gradienten in Kugelkoordinaten das Ergebnis in gewisser Weise vorwegnimmt. Denn woher kennt man den, wenn die üblichen Basisvektoren für Kugelkoordinaten erst aus der Koordinatenbasis folgen? Deshalb ist es sinnvoll, sich anzusehen, wie man vorgeht, wenn man den Gradienten nur in kartesischen Koordinaten kennen würde. Dazu benötigen wir die partiellen Ableitungen von ϑ und φ nach den kartesischen

Koordinaten x, y, z , aber ausgedrückt durch r, ϑ und φ . Die Koordinatentransformation ist beschreibbar durch

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Wir können nun die totalen Differentiale bilden,

$$\begin{aligned}dx &= \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi, \\dy &= \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi, \\dz &= \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta,\end{aligned}$$

und Gleichungen für die partiellen Ableitungen $\partial r/\partial x, \partial \vartheta/\partial x, \partial \varphi/\partial x, \partial r/\partial y, \partial \vartheta/\partial y, \partial \varphi/\partial y$, usw. erhalten, indem wir jede der Gleichungen durch die Differentiale dx unter Konstanthaltung von dy und dz ,

$$\begin{aligned}1 &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \vartheta \cos \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - r \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\0 &= \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \vartheta \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + r \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\0 &= \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x},\end{aligned}$$

dy unter Konstanthaltung von dx und dz , usw. dividieren. Das gibt neun lineare Gleichungen in neun Unbekannten, die offenbar äquivalent zur Beziehung für die Inversion von Jacobi-Matrizen sein müssen

$$\begin{aligned}\mathbb{1} &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \frac{\partial(r, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Um die partiellen Ableitungen der neuen Koordinaten nach den kartesischen zu erhalten (ausgedrückt durch die neuen Koordinaten), müssen wir also die linke Matrix invertieren, was z.B. mithilfe des gaussischen Eliminationsverfahrens möglich ist. Hier wird J^{-1} gemäß

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \text{adj}(J)$$

bestimmt (Stichwort Cramersche Regel). Die Adjunkte einer 3×3 Matrix ist über

$$J = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(J) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

definiert. Im Fall der obigen Jacobi-Matrix erhält man

$$\text{adj}(J) = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi & r \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \varphi \\ r^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi & r \cos \varphi \\ r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta & -r \sin^2 \vartheta & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Die Determinante von J ist $r^2 \sin \vartheta$. Es folgt

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi / \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi / \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -\frac{1}{r} \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \frac{1}{r} \cos \vartheta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \vartheta \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \vartheta \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi / \sin \vartheta & \frac{1}{r} \cos \varphi / \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hieraus können wir die Gradienten ablesen

$$\begin{aligned} \nabla \vartheta &= \frac{1}{r} (\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z), \\ \nabla \varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

(und $\nabla r = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z$). Da außerdem sowohl $\nabla \vartheta$ als auch $\nabla \varphi$ orthogonal zu \mathbf{r}/r sind, ergibt sich dasselbe Ergebnis für die jeweiligen Oberflächengradienten, d.h. $\nabla_s \vartheta = \nabla \vartheta$ und $\nabla_s \varphi = \nabla \varphi$. Wir erkennen jetzt natürlich, dass $\nabla \vartheta \propto \mathbf{e}_\vartheta$ und $\nabla \varphi \propto \mathbf{e}_\varphi$. Damit ist klar, dass die Skalarprodukte mit $r = R$ dieselben werden wie oben.

(c) Metriktenor Kugeloberfläche:

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \sin \alpha \mathbf{e}_x + r \sin \varphi \sin \alpha \mathbf{e}_y + r \cos \alpha \mathbf{e}_z,$$

wobei α ein fester Winkel ist und die auf der Fläche variierenden Koordinaten r und φ sind. Dass diese Fläche eine Kugeloberfläche darstellt, kann man sehen, wenn man die kartesischen Koordinaten nach z und den Koordinaten in den Ebenen senkrecht zu \mathbf{e}_z sortiert:

$$\begin{array}{ll} x = r \sin \alpha \cos \varphi, & y = r \sin \alpha \sin \varphi & \text{Kreis mit Radius } r \sin \alpha \\ z = r \cos \alpha & & \text{Lage des Kreises über der } xy\text{-Ebene} \end{array}$$

Für die Koordinatenbasis erhalten wir:

$$\mathcal{E}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z,$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \alpha \cos \varphi \mathbf{e}_y,$$

und die die Metrik definierenden Skalarprodukte werden:

$$\mathcal{E}_r \cdot \mathcal{E}_r = \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\mathcal{E}_r \cdot \mathcal{E}_\varphi = -r \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi + r \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

$$\mathcal{E}_\varphi \cdot \mathcal{E}_\varphi = r^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \alpha,$$

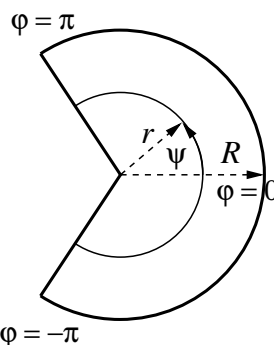
die Metrik lautet also

$$\mathbf{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix},$$

das zugehörige Linienelement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \alpha d\varphi^2.$$

Diesem Linienelement sieht man nicht unbedingt an, dass es einen flachen Raum beschreibt. Mit etwas Anschauungsvermögen kann man aber auf eine Koordinatentransformation kommen, die zur euklidischen Metrik in 2D führt. Stellen wir uns den Zylindermantel aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet vor. Dann ist die Länge einer Koordinatenlinie $r = \text{const.}$ gemäß dem Linienelement $2\pi r \sin \alpha$, denn der Winkel φ kann als von $-\pi$ bis π variierend angesehen werden (s. Bild).



Das legt es nahe, eine neue Winkelkoordinate $\psi = \varphi \sin \alpha$ einzuführen, denn die variiert genau so wie der Polarwinkel in der Ebene. Als nächstes schreiben wir auf kartesische Koordinaten um:

$$X = r \cos \psi = r \cos(\varphi \sin \alpha),$$

$$Y = r \sin \psi = r \sin(\varphi \sin \alpha).$$

Bilden wir Differentiale

$$dX = dr \cos(\varphi \sin \alpha) - r \sin(\varphi \sin \alpha) \sin \alpha d\varphi,$$

$$dY = dr \sin(\varphi \sin \alpha) + r \cos(\varphi \sin \alpha) \sin \alpha d\varphi,$$

und lösen nach dr bzw. $d\varphi$ auf [erste Gleichung mit $\cos(\varphi \sin \alpha)$ multiplizieren, zweite mit $\sin(\varphi \sin \alpha)$ und addieren $\leadsto dr$, erste mit $-\sin(\varphi \sin \alpha)$ multiplizieren, zweite mit $\cos(\varphi \sin \alpha)$ und addieren $\leadsto r \sin \alpha d\varphi$], so finden wir

$$\begin{aligned} dr &= \cos(\varphi \sin \alpha) dX + \sin(\varphi \sin \alpha) dY, \\ r \sin \alpha d\varphi &= -\sin(\varphi \sin \alpha) dX + \cos(\varphi \sin \alpha) dY, \end{aligned}$$

und in den neuen Koordinaten wird das Linienelement:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \alpha d\varphi^2 = dX^2 + dY^2 .$$

Die Metrik ist also euklidisch:

$$\mathbf{g}(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Alternativ kann man die Transformation $\psi = \varphi \sin \alpha$ ins Linienelement einsetzen

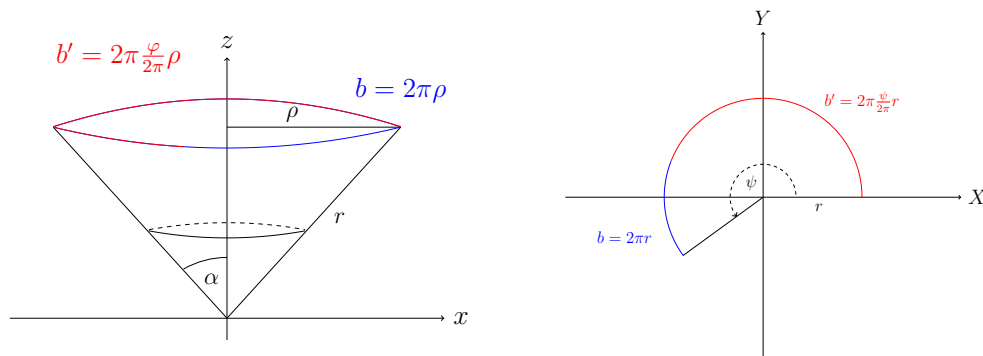
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2$$

und erkennen, dass dies das LE für den 2D euklidischen flachen Raum in Polarkoordinaten $X = r \cos \psi$, $Y = r \sin \psi$ ist.

Anmerkung: Zur Veranschaulichung der Transformation kann man sich die Bogenlänge von den Schnittkreisen ansehen. Die Bogenlängen b' sind in beiden Koordinatensystemen gleich groß:

$$\varphi \rho = \varphi \sin \alpha r = \psi r \quad \Rightarrow \quad \varphi \sin \alpha = \psi$$

Man erhält die benötigte Transformation.



Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

5. Geometrische Bedeutung der Christoffelsymbole

5 Pkt.

Betrachten wir eine durch die Koordinaten q_i festgelegte Koordinatenbasis:

$$\mathcal{E}_{q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ist klar, um welche Koordinaten es sich handelt, kann man die Notation etwas kompaktifizieren, indem man statt \mathcal{E}_{q_i} einfach \mathcal{E}_i schreibt. Der metrische Tensor lässt sich dann

bestimmen aus

$$g_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j.$$

Zeigen Sie, dass die Christoffelsymbole zweiter Art durch

$$\Gamma_{jk}^i = \mathcal{E}^i \cdot \partial_{q_j} \mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}^i \cdot \partial_j \mathcal{E}_k \quad (*)$$

gegeben sind ($\mathcal{E}^i = \nabla q_i$, bilden zusammen mit den \mathcal{E}_k ein Biorthonormalsystem).

Das heißt, wenn die partielle Ableitung ein Vektor des betrachteten riemannschen Raums ist, sind die Christoffelsymbole die Entwicklungskoeffizienten von $\partial_j \mathcal{E}_k$ bezüglich der gegebenen Koordinatenbasis. (Am Beispiel der gekrümmten Kugeloberfläche erkennt man leicht, dass dies nicht immer der Fall ist. Es gilt etwa $\partial_\theta \mathcal{E}_\theta = -R \mathbf{e}_r$, und das ist kein auf der Kugeloberfläche definierter Vektor.) Andernfalls sind sie die Entwicklungskoeffizienten einer Projektion von $\partial_j \mathcal{E}_k$ auf den riemannschen Raum.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass $\partial_j \mathcal{E}_k = \partial_k \mathcal{E}_j$ sowie $\mathcal{E}_j = g_{jk} \mathcal{E}^k$, und spielen Sie dann mit den Formeln, um die bekannte Darstellung der Christoffelsymbole zu erhalten.

Lösung:

$$\partial_j \mathcal{E}_k = \partial_{q_j} \mathcal{E}_k = \partial_{q_j} \partial_{q_k} \mathbf{r} = \partial_{q_k} \partial_{q_j} \mathbf{r} = \partial_k \mathcal{E}_j \quad (5.1)$$

Entwickeln wir \mathcal{E}_j nach den Vektoren der biorthogonalen Basis:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j &\equiv a_{jm} \mathcal{E}^m \quad | \cdot \mathcal{E}_k \\ \Rightarrow \mathcal{E}_j \cdot \mathcal{E}_k &= a_{jm} \mathcal{E}^m \cdot \mathcal{E}_k = a_{jm} \delta_k^m = a_{jk} \quad \text{also } a_{jk} = g_{jk}, \end{aligned}$$

d.h. die Entwicklungskoeffizienten sind die Komponenten des Metrikensors.

Nun betrachten wir

$$\partial_j g_{lk} = \partial_j (\mathcal{E}_l \cdot \mathcal{E}_k) = (\partial_j \mathcal{E}_l) \cdot \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_l \cdot (\partial_j \mathcal{E}_k) = g_{ki} (\partial_j \mathcal{E}_l) \cdot \mathcal{E}^i + g_{li} \mathcal{E}^i \cdot (\partial_j \mathcal{E}_k). \quad (5.2)$$

Wir führen die Abkürzung $B_{jk}^i = \mathcal{E}^i \cdot \partial_j \mathcal{E}_k$ ein und stellen fest, dass (5.1) $B_{jk}^i = B_{kj}^i$ impliziert. Dann schreiben wir Gleichung (5.2) und zwei zyklisch vertauschte Varianten hin:

$$\begin{aligned} \partial_j g_{lk} &= g_{ki} B_{jl}^i + g_{li} B_{jk}^i \\ \partial_l g_{kj} &= g_{ji} B_{lk}^i + g_{ki} B_{lj}^i \\ \partial_k g_{jl} &= g_{li} B_{kj}^i + g_{ji} B_{kl}^i. \end{aligned}$$

Wir addieren die erste und dritte dieser Gleichungen und ziehen die zweite ab:

$$\begin{aligned} \partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{kj} &= g_{ki} B_{jl}^i + g_{li} B_{jk}^i + g_{li} B_{kj}^i + g_{ji} B_{kl}^i - g_{ji} B_{lk}^i - g_{ki} B_{lj}^i \\ &= g_{li} B_{jk}^i + g_{li} B_{kj}^i = 2g_{il} B_{jk}^i = 2g_{nl} B_{jk}^n \end{aligned}$$

Überschieben wir die letzte Gleichung mit $\frac{1}{2} g^{il}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{kj}) = g^{il} g_{nl} B_{jk}^n = B_{jk}^i.$$

Die linke Seite ist aber gerade die bekannte Formel für die Christoffel-Symbole, also gilt:

$$\mathcal{E}^i \cdot \partial_j \mathcal{E}_k = \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{kj}). \quad (5.3)$$

(In der Vorlesung wurden die q_j mit x_j bezeichnet.)

Im Teil B können **5 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.