Teil A

10. Bewegung im Gravitationsfeld **14 Pkt.**

Nach dem einsteinschen Äquivalenzprinzip sind Trägheitskräfte und Gravitationskräfte wesensgleich. Dies hat zur Folge, dass es immer ein Koordinatensystem gibt, in dem sich Trägheitskräfte und Gravitationskräfte gegenseitig lokal kompensieren. (Das ist eine newtonsche Sichtweise. Allgemeinrelativistisch würde man sagen, dass Gravitationskräfte lokal als Folge von Beschleunigung relativ zu einem Inertialsystem, also als Trägheitskräfte interpretiert werden können. Folglich gibt es immer ein lokales Bezugssystem, in dem sie verschwinden. Das ist das – frei fallende – Inertialsystem.) In solch einem lokalen Inertialsystem haben die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie Gültigkeit. Insbesondere wird ein kräftefreies Teilchen durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{10.1}$$

beschrieben. Weiterhin gilt in diesem System die Minkowski-Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta\,, \tag{10.2}$$

wobei $\eta_{\alpha\beta}$ der übliche metrische Tensor für die Minkowski-Metrik ist. Betrachten wir nun ein globales Koordinatensystem mit den Komponenten x^μ. In jedem Punkt P existiere eine Koordinatentransformation $\xi^\alpha(x) = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ mit der Eigenschaft, dass (10.2) gelte. Diese Koordinatentransformation gilt nur für diesen Punkt, die Funktionen ξ^α sind also nicht global definiert, sondern nur jeweils in der Umgebung des Aufpunkts. (Die ξ^α können demnach für jeden Punkt neue Funktionen $\xi^\alpha_{\{x^i\}}$ sein.) Für das globale System gelte:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu.$$

(a) Zeigen Sie: (2 Pkt.)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}. \tag{10.3}$$

(b) Zeigen Sie, dass der Ausdruck (4 Pkt.)

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \tag{10.4}$$

die Christoffelsymbole darstellt:

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right).$$

(c) Zeigen Sie dann, dass für die Bewegung im Gravitationsfeld die Gleichung (4 Pkt.)

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \tag{10.5}$$

gilt. Man sieht, dass aus dem Äquivalenzprinzip und insbesondere aus der Forderung, dass sich Gravitionskräfte lokal wegtransformieren lassen sowie der SRT die Bewegungsgleichung für ein Teilchen im Gravitationsfeld folgt. Was fehlt hier noch, um die Bewegung einer gegebenen Massenverteilung wirklich berechnen zu können und damit eine Theorie dafür zu haben?

(d) Es seien zwei Punkte A und B in dem globalen Koordinatensystem vorgegeben, die zeitartig zueinander liegen. Zeigen Sie, dass die Suche nach einer extremalen Verbindung zwischen den Punkten: (4 Pkt.)

$$\int_A^B \mathrm{d}s \stackrel{!}{=} \text{extremal.}$$

zu Gleichung (c) als notwendige Bedingung führt. (Für zeitartige Geodäten heißt extremal maximal, nicht minimal.)

Hinweis: Erinnern Sie sich an Ihre Vorlesung zur Theoretischen Mechanik. Was haben Sie dort über das Hamiltonsche Prinzip gelernt?

Lösung: Ausgangspunkt der Überlegungen für diese Aufgabe ist das von Einstein postulierte Äquivalenzprinzip, welches die folgenden drei Feststellungen impliziert:

- Schwere und träge Masse sind gleich.
- Gravitationskräfte sind lokal äquivalent zu Trägheitskräften.
- Es gibt an jedem Ort ein Koordinatensystem, in dem sich Trägheitskräfte und Gravitionskräfte kompensieren, in solch einem Koordinatensystem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie *ohne* Gravitation.

Ein Beispiel für den 3. Punkt ist ein Labor, welches sich auf der internationalen Raumstation befindet. Sind keine Steuerdüsen oder ähnliches aktiv, befindet sich der Schwerpunkt der Raumstation im freien Fall. Genau an diesem Punkt kompensieren sich Trägheitskräfte (Zentrifugalkraft) und Gravition. An allen anderen Punkten der ISS gilt dies hingegen nur in sehr guter Näherung, da das Gravitionsfeld der Erde, wie alle Gravitionsfelder, nicht homogen ist.

Der betrachtete Körper befinde sich an einem bestimmten Punkt eines globalen Koordinatensystems. Die Komponenten dieses Systems bezeichnen wir mit x^μ. Weiterhin führen wir ein Koordinatensystem $\xi^\nu(x^\mu)$ ein, das an dem Punkt, an dem sich der Körper gerade befindet, ein lokales Inertialsystem ist. Nach dem Äquivalenzprinzip muss so ein Koordinatensystem existieren. Wie diese Transformation genau aussieht, hängt also von den Koordinaten in der Raumzeit x^μ ab.

Wählt man die Transformation so, dass das lokale Inertialsystem durch kartesisches Koordinaten beschreiben wird, gilt nach der SRT:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\mathrm{d}\xi^\beta.$$

wobei

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

der metrische Tensor der Minkowski-Metrik für kartesische Koordinaten ist.

Die Lichtgeschwindigkeit ist eine physikalische Konstante, die Eigenzeit ist eine objektiv messbare, skalare Größe, deshalb darf ds nicht vom Koordinatensystem abhängen.

Nehmen wir z.B. an, unser Objekt sei eine Uhr, diese misst den Abstand $cd\tau$ zweier raumzeitlich dicht beieinander liegender Ereignisse A und B, welche unsere Uhr erlebt. Beobachtet man diese beiden Ereignisse, hängt sowohl der zeitliche als auch der räumliche Abstand der Ereignisse vom Beobachtungssystem ab, was die Uhr beim Ereignis A und beim Ereignis B anzeigt, ist jedoch in jedem Bezugssystem dasselbe, ds ist ein Riemann-Skalar. Deshalb können wir schreiben:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha(x^\mu)\mathrm{d}\xi^\beta(x^\nu). \tag{10.6}$$

(a) Man beachte, dass in (10.6) die Summenkonvention zur Anwendung kommt und somit über $\nu, \mu = 1..4$ summiert wird. Es ist deshalb nicht möglich (10.6) einfach durch $\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ zu dividieren, obwohl es auf den ersten Blick so scheint als ob man dadurch die gesuchte Relation sofort erhält. Wir machen dies noch mal deutlich indem wir die ersten Terme Summe explizit aufschreiben:

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0 + g_{10}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^0 + g_{20}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^0...$$

Hier durch z.B. $\mathrm{d}x^\mu$ zu dividieren ist keine sinnvolle Aktion! Um die gesuchte Beziehung zu zeigen bilden wir das totale Differential:

$$\mathrm{d}\xi^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu$$

(auch hier gilt die Summenkonvention) und setzen dies in (10.6) ein:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{=g_{\mu\nu}}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

und können somit den metrischen Tensor des globalen Systems ablesen:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{10.7}$$

Dieser hängt im allgemeinen von der Position in der Raumzeit ab.

(b) Der hier bestimmte Zusammenhang wird später nützlich sein. Wir nutzen (10.7) und untersuchen folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}}_{X} \\ &+\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} + \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\nu\partial x^\mu}}_{Y} - \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\lambda}}_{Y} \\ &- \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}}_{X} = 2\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\end{aligned} \tag{10.8}$$

Die beiden mit X bezeichneten Terme heben sich gegeneinander auf, ebenso die mit Y bezeichneten Terme, denn da $\eta_{\alpha\beta}$ symmetrisch ist, kann man die Indizes α und β vertauschen.

Nun betrachten wir die Gleichung (10.4) und multiplizieren diese mit dem metrischen Tensor:

$$g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}\underbrace{\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\kappa}}_{=\delta^\beta_\kappa}\frac{\partial^2\xi^\kappa}{\partial x^\mu\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)$$

wobei wir im letztem Schritt (10.8) genutzt haben. Jetzt müssen wir nur noch mit dem zu $g_{\nu\sigma}$ inversen Tensor $g^{\kappa\nu}$ multiplizieren. Unter Beachtung von

$$g^{\kappa\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\kappa_\sigma,$$

erhält man das gesuchte Ergebnis:

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right).$$

Wem das zuviel vom zu beweisenden Ergebnis voraussetzt, der kann auch folgendermaßen vorgehen: Gleichung (10.7) legt eine ähnliche Formel für den inversen metrischen Tensor nahe. Vermutung:

$$g^{\nu\sigma} = \eta^{\gamma\epsilon}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\epsilon}\,. \tag{10.9}$$

Probe bzw. Beweis:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta^{\gamma\epsilon}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\epsilon} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\delta^\beta_\gamma\eta^{\gamma\epsilon}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\epsilon} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\delta^\epsilon_\alpha\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\epsilon}$$
$$= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\xi^\alpha} = \delta^\sigma_\mu\,.$$

Dann überschieben wir Gleichung (10.8) mit $\frac{1}{2}g^{\kappa\nu}$, um ein Christoffelsymbol zweiter Art zu erhalten:

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \frac{g^{\kappa\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right) = \eta^{\gamma\epsilon}\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\gamma}\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\epsilon}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}$$
$$= \eta^{\gamma\epsilon}\delta^\beta_\gamma\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\epsilon}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda} = \delta^\epsilon_\alpha\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\epsilon}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\,,$$

was die zu beweisende Beziehung ist (nach einer Umbenennung von λ in ν und unter Berücksichtigung der Symmetrie des Christoffelsymbols bezüglich einer Vertauschung der beiden kovarianten Indizes).

(c) Wir setzen $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$ bzw. das totale Differential $\mathrm{d}\xi^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu$ in Gleichung (10.1) ein:

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2\xi^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit $\dfrac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}$:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}}_{\delta^\kappa_\mu}\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{=\Gamma^\kappa_{\mu\nu}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}.$$

und können somit nach $\mathrm{d}^2x^\kappa/\mathrm{d}\tau^2$ auflösen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}.$$

Damit haben wir unsere Bewegungsgleichung mit Gravitation. Interpretiert man die rechte Seite als Gravitionskraft, sieht man, dass diese durch den metrischen Tensor selbst bestimmt ist. Dies folgt allein aus dem Äquivalenzprinzip. Wie der metrische Tensor für eine Energie/Massenverteilung zu bestimmen ist, folgt jedoch nicht aus diesem, dafür benötigt man die einsteinschen Feldgleichungen.

(d) Um einen Weg zu extremalisieren, den ein Objekt zwischen zwei Punkten in der Raumzeit zurücklegt, müssen wir ihn parametrisieren und das Wegintegral ausrechnen.

Nennen wir unseren Parameter α, es gilt also $x^\mu = x^\mu(\alpha)$. Der Ausdruck

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \mathrm{d}s(\alpha) = c\Delta\tau \stackrel{!}{=} \text{Extremum}$$

ist stationär zu machen, wobei die Endpunkte der Kurve: $\boldsymbol{x}(\alpha_0)$ und $\boldsymbol{x}(\alpha_1)$ festgehalten sind. Wir nutzen:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\mathrm{d}\alpha\,\underbrace{\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}}}_{=L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')},$$

Hier wurde $x'^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}$ verwendet. Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgen über die Variation von L (bekannt aus der theoretischen Mechanik) als notwendige Bedingung die Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\partial L}{\partial x'^\kappa} - \frac{\partial L}{\partial x^\kappa} = 0.$$

Wir werden zunächst die partiellen Ableitungen einzeln aus:

$$\frac{\partial L}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial}{\partial x'^\kappa}\left(\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})x'^\mu x'^\nu}\right) = \frac{g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\kappa}x'^\nu + x'^\mu\frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\kappa}\right)}{2L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')} = \frac{g_{\mu\nu}\left(\delta^\mu_\kappa x'^\nu + x'^\mu\delta^\nu_\kappa\right)}{2L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}$$

$$= \frac{g_{\kappa\nu}x'^\nu + \overbrace{g_{\mu\kappa}}^{g_{\kappa\mu}}x'^\mu}{2L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')} = \frac{g_{\kappa\nu}x'^\nu}{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})x'^\mu x'^\nu}\right) = \frac{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}x'^\mu x'^\nu}{2L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}$$

Nun können wir unsere Ergebnisse in die Euler-Lagrange Gleichung einsetzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\frac{g_{\kappa\nu}x'^{\nu}}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}x'^{\lambda}x'^{\sigma}}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{x'^{\mu}x'^{\nu}}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}x'^{\lambda}x'^{\sigma}}} = 0$$

Wir nutzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} = \tau'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,; \qquad x'^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\alpha} = \dot{x}^{\mu}\tau'$$

und erhalten (nach Division mit τ')

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{g_{\kappa\nu}\dot{x}^{\nu}}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}{\sqrt{g_{\lambda\sigma}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}}} = 0\,. \tag{10.10}$$

Wir verwenden

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = g_{\lambda\sigma}\mathrm{d}x^{\lambda}\mathrm{d}x^{\sigma} \quad \Rightarrow \quad c^2 = g_{\lambda\sigma}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}$$

in der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{\kappa\nu}\dot{x}^{\nu}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0 \\ \Rightarrow\quad & g_{\kappa\nu}\ddot{x}^{\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0\,, \end{aligned}$$

was wir wie folgt umformen ($g_{\kappa\nu}\ddot{x}^{\nu} = g_{\kappa\mu}\ddot{x}^{\mu}$)

$$\begin{aligned} g_{\kappa\mu}\ddot{x}^{\mu} &= -\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Bezeichnung der Summationsindizes μ und ν vertauscht. Nun multiplizieren wir noch von links mit $g^{\sigma\kappa}$ und erhalten unmittelbar das gesuchte Ergebnis

$$\ddot{x}^{\sigma} = -\underbrace{\frac{g^{\sigma\kappa}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right)}_{=\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}.$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

6. Christoffelsymbole **4 Pkt.**

Berechnen Sie die Christoffelsymbole für

(a) Den dreidimensionalen flachen Raum mit Kugelkoordinaten (3 Pkt.)

(b) Den dreidimensionalen flachen Raum mit Zylinderkoordinaten (1 Pkt.)

Hinweis: Es gilt $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$. Die x^μ sind die Komponenten der Koordinaten.

Lösung: Das Linienelement für den dreidimensionalen flachen Raum lautet in kartesischen Koordinaten

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{6.1}$$

(a) Der Ortsvektor in Kugelkoordinaten hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Wir ersetzen in (6.1) die totalen Differentiale $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ gemäß $\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$ und erhalten

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2.$$

Hieraus können wir die Metrik direkt ablesen

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \qquad g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\vartheta$$

Zur Berechnung der Christoffel-Symbole benötigen wir auch den inversen Metriktensor

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}, \qquad g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}$$

und die Ableitungen

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1,2,3}} = 0, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2r, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{2,3}} = 0,$$
$$\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 2r\sin^2\vartheta, \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 0.$$

Die Christoffel-Symbole werden gemäß

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{6.2}$$

bestimmt.

$$(1)\quad \Gamma^1_{kl} = \frac{1}{2}g^{1m}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1}\right)$$
$$\stackrel{g_{11}=\text{const.}}{=} \frac{1}{2}g^{11}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -r, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}\left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right) = -r\sin^2\vartheta$$

$$(2)\quad \Gamma^2_{kl} = \frac{1}{2}g^{2m}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2}\right)$$

$$\Gamma^2_{1l} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{2l}}{\partial x^1}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{2l} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{3l} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$(3)\quad \Gamma^3_{kl} = \frac{1}{2}g^{3m}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3}\right)$$

Kein Element der Metrik hängt von x^3 ab. Nur die vorderen beiden Summanden in der Klammer können ungleich Null sein.

$$\Gamma^3_{1l} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^1}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{2l} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\Gamma^3_{3l} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^3}\right), \qquad \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

Zusammenfassung aller nicht verschwindenden Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta, \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \\
&\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.
\end{aligned}$$

(b) Mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

lautet das Linienelement (6.1) in Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Wir lesen

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1$$

ab. Als Komponenten der inversen Metrik ergeben sich $g^{11} = 1, g^{22} = {}^1/_{r^2}, g^{33} = 1$. Wir berechnen die benötigten Ableitungen und stellen fest: nur g_{22} ist nicht konstant.

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2r$$

Es gibt nur drei von Null verschiedene Christoffel-Symbole

$$\Gamma^1_{22} = -r, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

7. Friedmann-Gleichung heuristisch **4 Pkt.**

Nehmen Sie eine homogene isotrope unendlich ausgedehnte Massenverteilung an, die gleichmäßig expandiert. Die einzige zu berücksichtigende Wechselwirkung sei die Gravitation. Unter diesen Voraussetzungen kann man den Ortsvektor eines beliebigen Teilchens der Massenverteilung zum Zeitpunkt t durch $\boldsymbol{r}(t) = a(t)\boldsymbol{x}$ beschreiben. Dabei ist $\boldsymbol{x}$ die Position des Teilchens in einem mitexpandierenden Koordinatensystem.

(a) Bestimmen Sie die Energie $U = T + V$ eines Teilchens der Masse m im Abstand r vom Koordinatenursprung, wobei T die kinetische und V die potentielle Energie des Teilchens im Rahmen der newtonschen Mechanik ist. Nehmen Sie dazu eine homogene Massenverteilung mit der Dichte ρ an. Die Geschwindigkeit des Teilchens sei ausschließlich radial. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe des Skalenfaktors $a(t)$ und einer mitbewegten Koordinate aus. (2 Pkt.)

(b) Aus der Homogenität folgt, dass die obige Gleichung für alle Abstände von Teilchen gelten muss. Drücken Sie $r(t)$ durch x aus und zeigen Sie, dass gilt: (2 Pkt.)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2},$$

wobei k durch $kc^2 := -2U/mx^2$ definiert ist, c die Lichtgeschwindigkeit darstellt und G die Gravitationskonstante ist. Warum kann unter unseren Annahmen k nicht vom Ort abhängen?

Lösung:

(a) Die kinetische Energie eines Teilchens ist in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) \, .$$

Dass die Geschwindigkeit ausschließlich radial ist, sieht man schnell: Die Position eines beliebigen Teilchens ist gegeben durch $\boldsymbol{r} = a(t)\boldsymbol{x}$, dessen Geschwindigkeit durch $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{a}\boldsymbol{x}$. Da $\boldsymbol{x}$ ein Ortsvektor ist, zeigt er in radiale Richtung. Daraus folgt unmittelbar $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$.

Die potentielle Energie ist das Gravitationspotential. Wie aus der klassischen Mechanik bekannt sein sollte, spürt ein Teilchen im inneren einer Hohlkugel keine Kraft. Für die potentielle Energie des Teilchens ist deshalb nur die Masse M innerhalb einer Kugel mit dem Radius r wichtig und lautet:

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4G\pi\rho r^2 m}{3} \, . \tag{7.1}$$

Die Gesamtenergie des Teilchens ist somit:

$$U = T + V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{4G\pi\rho r^2 m}{3} \, .$$

Setzen wir nun $r(t) = a(t)x$ und berücksichtigen, dass $\dot{x} = 0$, erhalten wir:

$$U = \frac{1}{2} m \dot{a}^2 x^2 - \frac{4}{3} m G\pi\rho a^2 x^2 \tag{7.2}$$

(b) Wir stellen (7.2) um

$$\dot{a}^2 = \frac{2}{mx^2} \left(U + \frac{4}{3} m G\pi\rho a^2 x^2 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{2U}{mx^2 a^2} + \frac{8}{3mx^2} m G\pi\rho x^2$$

und verwenden die Definition von k

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho \, .$$

Dies ist die zu zeigende Relation

Da aufgrund der Homogenität $a(t)$ nur von der Zeit, nicht jedoch vom Ort abhängen kann, darf auch k keine Funktion des Ortes sein. Wir sehen dies auch, wenn wir die Definition $kc^2 = -2U/mx^2$ mit Gleichung (7.2) vergleichen. U ist proportional zu x^2, die Ortsabhängigkeit kürzt sich also weg.

Wie Sie später sehen werden, entspricht die Form dieser Gleichung derjenigen, die man aus der allgemeinen Relativitätstheorie ableiten kann. Allerdings gibt es Unterschiede in der physikalischen Bedeutung. So ist z.B. die Konstante k ein Maß für die Krümmung des Universums, was aus der newtonschen Ableitung natürlich nicht hervorgeht. Auch ist die hier beschriebene Expansion keine Expansion des Raumes, sondern lediglich eine Bewegung der im Raum enthaltenen Teilchen. Weiterhin fehlt in dieser Ableitung die kosmologische Konstante.

Bemerkung: In Gleichung (7.1) sieht man, dass auf ein Teilchen, welches sich nicht im Ursprung des Koordinatensystems befindet, eine Kraft wirkt, auf ein Teilchen im Ursprung des Koordinatensystems jedoch nicht. Das Ganze soll nun aber für jedes beliebiges Teilchen an jedem beliebigen Ort gelten! Man könnte denken, das ist ein Widerspruch! Warum ist jedes Teilchen für sich betrachtet kräftefrei, von einem anderem Teilchen aus betrachtet aber nicht? Die Antwort ist, dass die Koordinatensysteme, zwischen denen man wechselt, gegeneinander beschleunigt sind. Wenn man annimmt, das Teilchen (A), das ich gerade betrachte, befindet sich in einem Inertialsystem und dann wechselt man in das System eines anderen Teilchens (B), kompensieren die dabei auftretenden Trägheitskräfte gerade die Kraft, welche von A aus betrachtet auf B wirken (dies folgt unmittelbar aus dem Äquivalenzprinzip). Im System B ist das Teilchen B dann kräftefrei, Teilchen A bewegt sich nun hingegen beschleunigt und entsprechend wirkt eine Kraft auf Teilchen A. Insoweit ergibt sich hier kein Widerspruch! *Aber* jedes Teilchen ist gleichberechtigt! Man kann nicht sagen das System von Teilchen A ist inertial, das von B nicht! Hier stößt die Begriffsbildung der newtonschen Mechanik und auch die der SRT an ihre Grenzen!

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.