13. Wissensfragen — 21 Pkt.

(a) Erläutern Sie die Begriffe Entfernungsmodul, absolute und scheinbare Helligkeit. (3 Pkt.)

(b) Was versteht man unter einer Cepheide? Wofür sind Cepheiden nützlich? (2 Pkt.)

(c) Was versteht man unter dem kosmologischen Prinzip? Was folgt daraus für die Krümmung des Raumes? (3 Pkt.)

(d) Welche drei fundamentalen empirischen Beobachtungen muss ein kosmologisches Modell erklären? (3 Pkt.)

(e) Geben Sie eine Größenordnung für den Durchmesser eines weißen Zwergs an. Wodurch wird sein Kollaps verhindert und welche Masse darf er nicht überschreiten, damit dies möglich ist? Geben Sie deren ungefähre Größe an.[1] (2 Pkt.)

(f) Wie erklärt die allgemeine Relativitätstheorie die Gravitation? Ist sie eine Kraft? Welche Größe ist die Quelle der Gravitation?[2] (3 Pkt.)

(g) Längs welcher Art von Bahn bewegt sich ein Teilchen, das nur der Gravitation unterworfen ist, nach der allgemeinen Relativitätstheorie? (2 Pkt.)

(h) Wie entstanden die meisten schwereren Elemente (Elemente jenseits des Lithiums)? (1 Pkt.)

(i) Was versteht man unter einem Ereignishorizont? Wie macht sich das Erreichen des Ereignishorizonts oder Grenzkegels durch eine Galaxie optisch bemerkbar? (2 Pkt.)

Lösung: In Blau gedruckte Texte sind zusätzliche Erläuterungen und kein notwendiger Teil der Antwort.

(a) Rekursive Erläuterung: $\mu = m - M$
wobei: μ – Entfernungsmodul, m scheinbare, M absolute Helligkeit

absolute Helligkeit eines Sterns: scheinbare Helligkeit, die er in einer Entfernung von 10 pc hätte

scheinbare Helligkeit: logarithmisches Intensitätsmaß: $m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{I_2}{I_1}$ (I_i sind die Intensitäten)

$m = 0$ entspricht $I = 2.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$

(b) Cepheiden sind Sterne, deren Helligkeit sich periodisch verändert. Sie sind zur Entfernungsbestimmung geeignet, da, je nach Typ der Cepheide, eine feste Beziehung zwischen ihrer absoluten Helligkeit und der Periode existiert.

(c) Das kosmologische Prinzip behauptet *Isotropie* und *Homogenität* des Raums $\rightsquigarrow$ (Schursches Lemma) der Raum hat eine *konstante Krümmung*.

(d)
- den kosmologischen Mikrowellenhintergrund
- die Elementhäufigkeit (von Wasserstoff und Helium)
- die Rotverschiebung weit entfernter kosmologischer Objekte

[1] Nicht notwendigerweise in kg...

[2] Es ist nicht nötig, die einsteinschen Feldgleichungen hinzuschreiben. Eine rein verbale Antwort reicht aus. Verboten sind Formeln natürlich nicht, aber ihre Terme müssen erläutert werden. Das Ergebnis sollte eine „Erklärung“ sein.

(e) 20000 km

Der Kollaps eines weißen Zwergs wird durch den Entartungsdruck seines Elektronengases verhindert. Dies ist nicht mehr möglich, wenn seine Masse die Chandrasekhar-Masse von $\approx 1.44 M_\odot$ ($\approx 2.88 \times 10^{30}$ kg) überschreitet.

(f) Gravitation ist eine Folge der Krümmung der Raumzeit. Sie ist keine Kraft. (Kräftefreie Teilchen folgen Geodäten in der Raumzeit, die sich einander nähern können, wenn die Raumzeit gekrümmt ist $\rightsquigarrow$ „Illusion" einer Anziehungskraft.) Die Quelle der Gravitation ist der Energie-Impuls-Tensor (rechte Seite der Einsteinschen Feldgleichungen), in laxer Sprechweise also die Energie (nicht aber die Masse!).

(g) längs einer *Geodäte* der *Raumzeit* (1Punkt für die Geodäte und 1 Punkt für die Raumzeit)

(h) Schwerere Elemente entstanden durch *Kernfusion in Sternen* (schwerere als Eisen in Supernova-Explosionen)

(i) Der Ereignishorizont eines Beobachters ist der geometrische Ort aller Ereignisse (zur gegenwärtigen Zeit), von denen Licht diesen Beobachter gerade zur spätestmöglichen Zeit des Universums erreichen könnte. (Ohne die Einschränkung „zur gegenwärtigen Zeit" spricht man statt vom Ereignishorizont auch vom Grenzkegel.) Wird der Ereignishorizont/Grenzkegel von einer Galaxie durchschritten, so geht deren Rotverschiebung gegen ∞.

14. Horizonte im DeSitter-Kosmos **9 Pkt.**

In einem DeSitter-Kosmos ($k = 0$) sei der Expansionsskalar gegeben durch

$$S(t) = S_0\, e^{ct/a} \qquad (a = \text{const.})$$

und der Kosmos beginne seine Existenz bei $t = 0$ (mit der „Größe" S_0). Unsere Milchstraße befinde sich bei $\rho = 0$.

(a) Bestimmen Sie den Ereignishorizont unserer Galaxis als Funktion der Zeit. (1 Pkt.)

(b) Mit welcher Geschwindigkeit (Änderung der Maßstabsentfernung pro Zeit) bewegt sich eine Galaxie am Ereignishorizont? (2 Pkt.)

(c) Berechnen Sie den Teilchenhorizont. Wie groß wird er maximal (in mitbewegten Koordinaten)? (2 Pkt.)

(d) Wie groß ist die Geschwindigkeit einer Galaxie am Teilchenhorizont? (1 Pkt.)

(e) Welche Rezessionsgeschwindigkeit darf eine Galaxie nicht überschreiten, damit ihr Licht uns noch erreicht? (3 Pkt.)

Lösung:

(a) Da $k = 0$, brauchen wir nicht zwischen $\sigma(\rho)$ und ρ zu unterscheiden. Der Ereignishorizont ist gegeben durch

$$\rho_E(t) = \int_t^\infty \frac{c}{S(t')}\mathrm{d}t' = \int_t^\infty \frac{c}{S_0\, e^{ct'/a}}\mathrm{d}t' = \frac{c}{S_0}\frac{-a}{c}\, e^{-ct'/a}\Big|_t^\infty = \frac{a}{S_0\, e^{ct/a}} = \frac{a}{S(t)}\,.$$

Seine mitbewegte Koordinate nimmt also exponentiell schnell ab, die zugehörige Maßstabsentfernung ist eine Konstante:

$$D_E = S(t)\rho_E(t) = a\,.$$

(b) Hier müssen wir ein bisschen aufpassen. Man kann nicht einfach die Geschwindigkeit des Ereignishorizonts selber berechnen, die wäre $v_E = \dot{D}_E = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0\,.$ Stattdessen wissen wir, dass ρ_G, die Koordinate der Galaxie, zeitlich konstant ist. Das heißt, sie stimmt nur zu dem betrachteten Zeitpunkt mit ρ_E überein, darf aber nicht mit nach der Zeit abgeleitet werden:

$$v_{GE} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S(t)\rho_G\right) = \dot{S}(t)\rho_G = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}S(t)\rho_G = \frac{c}{a}S(t)\frac{a}{S(t)} = c.$$

Der Ereignishorizont selbst steht still, die Galaxie wandert mit Lichtgeschwindigkeit durch ihn aus. Ihre Rotverschiebung wird unendlich, weil ihr Licht erst zur Zeit $t = \infty$ in der Galaxis ankommt, und $z \to S(\infty)/S(t) - 1$.

(c) Wenn $t_{\min} = 0$ (für diese Art Kosmos wäre auch $t_{\min} = -\infty$ denkbar), dann ist der Teilchenhorizont gegeben durch:

$$\rho_T(t) = \int_0^t \frac{c}{S(t')}\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{c}{S_0\, e^{ct'/a}}\mathrm{d}t' = \frac{c}{S_0}\frac{-a}{c}\, e^{-ct'/a}\Big|_0^t = \frac{a}{S_0}\left(1 - e^{-ct/a}\right)$$

und er nimmt den Maximalwert $\rho_{\max} = \frac{a}{S_0}$ an. Nach einer Zeit $t^* \gg c/a$ wandern keine neuen Galaxien mehr in den Horizont ein.

Die zugehörige Maßstabsentfernung wächst exponentiell: $D_{\max} = aS(t)/S_0$.

(d) $v_{GT} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)\rho_G = \dot{S}(t)\rho_G = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}S(t)\rho_G = \frac{c}{a}S(t)\rho_T(t) = c\left(e^{ct/a} - 1\right)\,.$

Zur Zeit $t = 0$ war der Teilchenhorizont null. Seit der Zeit $\tilde{t} = (a/c)\ln 2$ ist die Geschwindigkeit von Galaxien am Teilchenhorizont größer als die Lichtgeschwindigkeit, d.h. sie lagen bereits jenseits des Ereignishorizonts.

(e) Für die Bewegung von Licht von der fernen Galaxie auf die Milchstraße zu addiert sich zur Geschwindigkeit aufgrund der kosmischen Expansion die Eigengeschwindigkeit des Lichts:

$$\dot{D}_L = \dot{S}\rho - c = \frac{\dot{S}}{S}D_L - c = \frac{c}{a}D_L - c\,. \tag{14.1}$$

Ist die Rezessionsgeschwindigkeit der Galaxie zur Zeit t_0 der Aussendung des Lichts v_0, so gilt

$$v_0 = \dot{D}_{\text{Galaxie}} = \dot{S}(t_0)\rho_0 \quad \Rightarrow \quad D_L(t_0) = \frac{S(t_0)}{\dot{S}(t_0)}v_0 = \frac{a}{c}\, v_0\,,$$

was uns die Anfangsbedingung für die Lösung unserer die Lichtausbreitung beschreibenden Differentialgleichung liefert. Hier kann man schon sehen, dass Galaxien mit $v_0 \geq c$ außerhalb des Ereignishorizonts liegen, also sicher nicht sichtbar werden. Allerdings sind wir noch nicht fertig, weil es denkbar wäre, dass die obere Geschwindigkeitsschranke für Sichtbarkeit sogar unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt. Bei überexponentiell schneller Ausdehnung des Universums kann das passieren. Genaue Analyse des Begriffs Ereignishorizont würde uns aber doch erlauben, hier mit Rechnen aufzuhören, denn alles was innerhalb des Ereignishorizonts liegt, wird prinzipiell einmal sichtbar... Damit ist klar, dass die obere Geschwindigkeitsschranke auch nicht unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen kann. Eine detaillierte Begründung gibt die weitere Rechnung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (14.1) erhält man durch Inspektion (eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist $D_L = a$):

$$D_L(t) = Ae^{ct/a} + a\,. \tag{14.2}$$

Mit der vorgegebenen Anfangsbedingung erhalten wir (für $t_0 = 0$):

$$D_L(t) = a\left(\frac{v_0}{c} - 1\right)e^{ct/a} + a\,,$$

was genau dann eine Nullstelle hat, wenn $v_0/c - 1 < 0$. Damit darf die Rezessionsgeschwindigkeit für Sichtbarkeit einer Galaxie wegen $v_0 < c$ die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten, ja nicht einmal erreichen. Galaxien mit kleinerer Geschwindigkeit werden aber sichtbar.

Fazit: In einem solchen Universum sieht man Galaxien zwar nicht mehr in einem Zustand, in dem sie waren, nachdem ihre Rezessionsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschritten hat, aber man sieht durchaus Galaxien, die gegenwärtig schneller als das Licht entweichen. Nur haben sie das Licht, das man von ihnen sieht, ausgesandt, als sie noch langsamer als das Licht waren.

15. Ein kosmologisches Modell **8 Pkt.**

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - c^2t^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] \tag{15.1}$$

mit $t \in (0,\infty)$ und $\chi \in (0,\infty)$ beschreibt ein kosmologisches Modell.

(a) Welchen Wert hat der Krümmungsindex? (Hinweis: Setzen Sie $\rho = \sinh\chi$.) Bestimmen Sie den Bremsparameter $q(t)$. (2 Pkt.)

(b) Gibt es in diesem Modell einen Teilchenhorizont? (2 Pkt.)

(c) Führen Sie neue Koordinaten $T = t\cosh\chi$, $R = ct\sinh\chi$ ein. Zeigen Sie auf diese Weise, dass die durch (15.1) charakterisierte Raumzeit eine Teilmenge des Minkowski-Raums ist. Skizzieren Sie diese in der $R\,cT$-Ebene. Beschreiben Sie qualitativ die Flächen mit konstantem t. Können Sie eine Aussage zur Krümmung des Raumes in den durch (15.1) beschriebenen Koordinaten und zu der der Raumzeit in diesem Modell treffen? (4 Pkt.)

Lösung:

(a) Krümmungsindex:

$$\rho = \sinh\chi \qquad \mathrm{d}\rho = \cosh\chi\,\mathrm{d}\chi \qquad \cosh\chi = \sqrt{1+\sinh^2\chi} = \sqrt{1+\rho^2}$$

$$\mathrm{d}\chi = \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - c^2t^2\left[\frac{\mathrm{d}\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right]$$

Robertson-Walker-Metrik mit $k = -1$!

Bremsparameter:

$$q(t) = \frac{\ddot{S}(t)\,S(t)}{\dot{S}^2(t)}$$

$$S(t) = ct \quad\Rightarrow\quad \dot{S}(t) = c \quad\Rightarrow\quad \ddot{S}(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{q(t) \equiv 0}$$

(b) Teilchenhorizont:

$$\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}\rho'}{\sqrt{1+\rho'^2}} = c\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{S(t')} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{t'} = \ln t'\Big|_0^t = \infty$$

$\rightsquigarrow$ es existiert kein Teilchenhorizont!

(c) $T = t\cosh\chi$, $R = ct\sinh\chi$

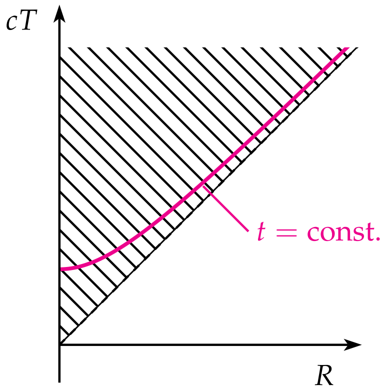
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T &= \mathrm{d}t\cosh\chi + t\sinh\chi\,\mathrm{d}\chi\\
\mathrm{d}R &= c\mathrm{d}t\sinh\chi + ct\cosh\chi\,\mathrm{d}\chi\\
c^2\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}R^2 &= c^2\mathrm{d}t^2\cosh^2\chi + 2c^2t\cosh\chi\sinh\chi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\chi + c^2t^2\sinh^2\chi\,\mathrm{d}\chi^2\\
&\quad - c^2\mathrm{d}t^2\sinh^2\chi - 2c^2t\cosh\chi\sinh\chi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\chi - c^2t^2\cosh^2\chi\,\mathrm{d}\chi^2\\
&= c^2\mathrm{d}t^2 - c^2t^2\,\mathrm{d}\chi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\qquad \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}R^2 - c^2t^2\sinh^2\chi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\\
&= c^2\mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}R^2 - R^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)
\end{aligned}$$

Das ist die Minkowski-Metrik!

Allerdings wird nicht der gesamte Wertebereich $T \in \mathbb{R}$, $R \in (0, \infty)$ abgedeckt, denn aus $t > 0$ folgt $T > 0$, aus $\chi > 0$ dann auch $R > 0$; weiter gilt $R^2 = c^2t^2 \sinh^2 \chi < c^2t^2 \cosh^2 \chi = c^2T^2$, also ist die betrachtete Raumzeit äquivalent nur zu der Teilmenge der Minkowski-Raumzeit, die innerhalb des Vorwärtslichtkegels des Punktes $(T, R) = (0, 0)$ liegt.

Mathematisch: $T \in (0, \infty)$, $R \in (0, \infty)$, $R < cT$.



Das schraffierte Gebiet entspricht der gesuchten Teilmenge der Minkowski-Raumzeit.

Offensichtlich ist $c^2T^2 - R^2 = c^2t^2 > 0$, deshalb entsprechen die Kurven $t = \text{const.}$ Hyperbeln im $R\,cT$-Diagramm, die nach oben geöffnet sind und sich asymptotisch an den Lichtkegel anschmiegen. (Man kann hier auch die Abwesenheit eines Teilchenhorizonts diskutieren: zu einer beliebig kleinen positiven Zeit t kann Licht bereits von allen R-Werten empfangen werden, da die Hyperbel sich ins Unendliche erstreckt.)

Krümmung des Raumes: negativ, wegen $k = -1$
Krümmung der Raumzeit: null, wegen Minkowski-Metrik
Anmerkung: Die Raumkrümmung kommt durch die Definition der Gleichzeitigkeit mithilfe der Zeit t zustande. In den Koordinaten R, T ist auch der Raum ungekrümmt. Die Raumkrümmung ist kein Absolutum wie die der Raumzeit (die man über den Krümmungstensor bekommt), sondern hängt von der Wahl der Raumschnitte, d.h. der als gleichzeitig definierten Untermengen der Raumzeit ab.

16. Sturz in ein schwarzes Loch **11 Pkt.**

Die Metrik eines nicht rotierenden ungeladenen schwarzen Lochs ist gegeben durch

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{16.1}$$

Im Folgenden schreiben wir der Kürze halber für den Schwarzschildradius $2GM/c^2$ nur noch $2M$ (d.h. wir setzen formal $G = c = 1$).

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens, das sich in dieser Metrik bewegt, lassen sich zwar mithilfe der Geodätengleichung aus der Vorlesung aufstellen; einfacher ist hier aber eine direkte Bestimmung aus der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\,ct}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right\}, \tag{16.2}$$

die zu den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{16.3}$$

führt (das stellt eine ökonomische Methode dar, die Christoffelsymbole zu berechnen).

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Anfangsbedingung $\vartheta(0) = \pi/2$, $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\tau|_{t=0} = 0$ dazu führt, dass das betrachtete Teilchen in der Fläche $\vartheta = \pi/2$ verbleibt. Wir können also eine vereinfachte Lagrangefunktion betrachten. (1 Pkt.)

(b) Verwenden Sie die Tatsache, dass φ und t zyklische Koordinaten sind, um einen Drehimpulssatz und ein weiteres Integral der Bewegung aufzustellen. (2 Pkt.)

(c) Als dritte Bewegungsgleichung erster Ordnung verwenden Sie die Definitionsgleichung der Eigenzeit. Eliminieren Sie daraus $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$. (3 Pkt.)

(d) Betrachten Sie nun eine radiale Bahn, also eine Bahn mit verschwindendem Drehimpuls. Berechnen Sie die Fallzeit t eines Teilchens, das irgendwann im Unendlichen mit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ gestartet ist und zur Zeit $t_0 = 0$ den Ort $r = r_0$ passiert, bis zum Schwarzschildradius $r = 2M$. Vergleichen Sie mit der Eigenzeit des fallenden Teilchens und der Zeit, die das Teilchen in einem Newtonschen Gravitationspotential bei gleicher Zentralmasse brauchen würde. (4 Pkt.)

(e) Bestimmen Sie die Eigenzeit eines Teilchens bis zum Erreichen von $r = 0$. (1 Pkt.)

Lösung:

(a) Wir beginnen mit der Bewegungsgleichung für $\vartheta(\tau)$.
Wir haben $\dfrac{\partial L}{\partial\,\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\tau} = -r^2\dfrac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}$, woraus mit (16.3) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(-r^2\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\right) + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0\,. \tag{16.4}$$

Die Anfangsbedingung $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ impliziert, dass $\cos\vartheta = 0$ und damit

$$-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}r^2\right)\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0}}_{0} - r^2\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = 0\,.$$

Damit ist die Beschleunigung $\dfrac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}\tau^2}$ zur Zeit $\tau = 0$ gleich null und $\dfrac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}$ bleibt null. Also ändert sich auch ϑ selbst nicht. Man kann auch direkt durch Einsetzen verifizieren, dass $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ die Gleichung (16.4) löst. Für Teilchen, die sich in der Ebene

$\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ bewegen, vereinfacht sich die Lagrangefunktion (16.2) auf

$$L = \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\,ct}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right\}. \tag{16.5}$$

(b) φ zyklisch $\Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}} = \text{const.}$

$$-r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = -h = \text{const.}$$
$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = h = \text{const.} \tag{16.6}$$

Das ist die Uniformität der Flächengeschwindigkeit oder die Dreihimpulserhaltung.

t zyklisch $\Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau}} = \text{const.}$

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}ct}{\mathrm{d}\tau} = A = \text{const.} \tag{16.7}$$

Dies können wir als Energieerhaltungssatz interpretieren, denn in der nichtrelativistischen Dynamik ist Invarianz von L unter einer zeitlichen Translation mit der Energieerhaltung verknüpft. Hier ist der Zusammenhang weniger offensichtlich.

(c) Definition der Eigenzeit (eines Teilchens, das sich in der Ebene $\vartheta = \pi/2$ bewegt):

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\varphi^2\,,$$
$$c^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2. \tag{16.8}$$

Gleichungen (16.6), (16.7) und (16.8) stellen ein vollständiges System von Bestimmungsgleichungen für die Funktionen $t(\tau)$, $r(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ dar. Wir verwenden (16.6) und (16.7), um $\mathrm{d}\varphi(\tau)/\mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ aus (16.8) zu eliminieren:

$$c^2 = \frac{A^2}{1-\dfrac{2M}{r}} - \frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{h^2}{r^2}\,,$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = A^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(c^2+\frac{h^2}{r^2}\right). \tag{16.9}$$

(d) Radiale Bahn $\curvearrowright$ $\varphi = \text{const.}$ $\curvearrowright$ $h = 0$. Zu kleineren r-Werten fallendes Teilchen:

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{A^2 - c^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\,. \tag{16.10}$$

Anfangsbedingungen: für $r \to \infty$ ist $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \curvearrowright \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 0$. Das hat mit (16.10) zur Folge, dass $A^2 = c^2$, also o.B.d.A. $A = c$, und die Bewegungsgleichung wird:

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\tau} = -c\sqrt{\frac{2M}{r}}\,. \tag{16.11}$$

Setzen wir nun die Zeit t_0, zu der der Ort r_0 passiert wird, gleich null, so können wir für das zwischen $r = r_0$ und $r = 2M$ verstreichende Eigenzeitintervall schreiben (Trennung der Variablen):

$$c\Delta\tau = -\frac{1}{\sqrt{2M}}\int_{r_0}^{2M}\sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3\sqrt{2M}}\left(r_0^{3/2} - (2M)^{3/2}\right)\,. \tag{16.12}$$

Ersetzen wir M wieder durch GM/c^2, so erhalten wir

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r_0^{3/2} - \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^{3/2}\right)} \tag{16.13}$$

Für die während dieses Eigenzeitintervalls verstreichende Schwarzschildzeit Δt können wir zunächst mithilfe von (16.11) und (16.7) das infinitesimale Inkrement aufstellen:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{1-\dfrac{2M}{r}} = -\frac{1}{c}\,\frac{1}{1-\dfrac{2M}{r}}\,\frac{\sqrt{r}\mathrm{d}r}{\sqrt{2M}}\,.$$

Integration liefert

$$\Delta t = -\frac{1}{\sqrt{2M}c}\int_{r_0}^{2M}\frac{r^{3/2}}{r-2M}\mathrm{d}r \sim -\frac{2M}{c}\ln\left(r-2M\right)\Big|^{2M} \underset{r\to 2M}{\longrightarrow} \infty\,. \tag{16.14}$$

Das Integral lässt sich mit einer unbestimmten oberen Grenze (r) exakt auswerten, was liefert:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2M}c}\left[4M\sqrt{r} + \frac{2}{3}r^{3/2} - 2(2M)^{3/2}\mathrm{artanh}\left(\sqrt{\frac{r}{2M}}\right)\Big|_{2M}^{r_0}\right]\,. \tag{16.15}$$

Der Areatangens hyperbolicus divergiert logarithmisch, wenn sein Argument gegen eins geht. Wir erhalten also auch auf diese Weise $\Delta t \to \infty$.

Zur Berechnung der Fallzeit in einem durch eine gleich große Masse erzeugten newtonschen Potential verwenden wir den Energiesatz

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - G\frac{mM}{r} = E = 0\,. \tag{16.16}$$

t ist jetzt die absolute newtonsche Zeit und der Wert der Energie E folgt aus der Bedingung, dass für $r \to \infty$ gerade die Geschwindigkeit $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ gegen null gehen soll. Lösen wir (16.16) nach $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ auf, so ergibt sich

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2GM}{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}\,. \tag{16.17}$$

Das aber ist identisch mit (16.11), wenn wir dort die abgekürzte Darstellung M wieder durch die Kombination GM/c^2 ersetzen, die sie repräsentiert (und τ in t umbenennen). Dann muss sich bei gleicher Anfangsbedingung das gleiche Resultat für die Integration der Differentialgleichung ergeben:

$$\boxed{\Delta t = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\left(r_0^{3/2} - \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^{3/2}\right)} \tag{16.18}$$

Diese Zeit stimmt mit der Eigenzeit eines in ein schwarzes Loch fallenden Beobachters beim Erreichen von $r_s = 2GM/c^2$ überein. (Und der einzige Grund, warum in einer nichtrelativistischen Formel die Lichtgeschwindigkeit c auftaucht, besteht in der Tatsache, dass c nun mal in der Definition des Schwarzschildradius r_s steht.)

(e) Zur Berechnung der Eigenzeit, in der das Teilchen bis zum Punkt $r = 0$ fällt, brauchen wir nicht mehr zu tun, als in (16.12) die obere Integrationsgrenze durch null zu ersetzen. Das ergibt

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}\,r_0^{3/2}} \tag{16.19}$$

17. Satellitenuhren (GPS) **9 Pkt.**

Die durch die Erdgravitation erzeugte Metrik wird (außerhalb der Erdkugel) in guter Näherung durch das Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = (1+2\Phi)\,c^2\mathrm{d}t^2 - (1-2\Phi)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

beschrieben, wobei $\Phi = -GM/rc^2$ $(|\Phi| \ll 1)$[3] das mit dem Faktor $1/c^2$ entdimensionalisierte newtonsche Gravitationspotential ist.

(a) Berechnen Sie die Zeit τ, die auf einer Uhr (mit festen Winkelkoordinaten) im Abstand R vom Erdmittelpunkt verstreicht, als Funktion der Koordinatenzeit t $[\tau(0) = 0]$. Laufen Uhren schneller oder langsamer, wenn R zunimmt? (2 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ für einen Satelliten auf einer Kreisbahn (mit Radius R) über dem Äquator ($\vartheta = \pi/2$). (5 Pkt.)

Hinweis: Die Lagrangefunktion $L = 1/2\,(\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau)^2$ liefert zwei zyklische Koordinaten, die Kreisbahnbedingung $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau = 0$ führt darüber hinaus zu $\partial L/\partial r = 0$. Mit

[3] Gleichungen können also in Φ linearisiert/entwickelt werden, wo immer das sinnvoll ist.

$L = {}^1\!/\!{}_2\, c^2$ kann man die Integrationskonstanten als Funktion des Kreisbahnradius bestimmen. Zwischenergebnis zur Kontrolle: $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = \pm c\sqrt{|\Phi|}/R + \mathcal{O}\left(|\Phi|^{3/2}\right)$.

(c) Wie lange braucht ein Satellit auf einer Kreisbahn mit 20183 km Höhe (Erdradius $R_E =$ 6370 km) für einen Umlauf (Eigenzeit)? Geben Sie die Differenz zur Eigenzeit einer am Pol auf der Erdoberfläche positionierten Uhr in Mikrosekunden an. (2 Pkt.)
Hinweis: Die Erdabplattung darf vernachlässigt werden.
Zahlenwerte: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/kg s^2, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, Erdmasse $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

Lösung:

(a) Feste Winkelkoordinaten $\rightsquigarrow \mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}\varphi = 0$
$r = R \rightsquigarrow \mathrm{d}r = 0$, also:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = (1+2\Phi)c^2\mathrm{d}t^2$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1+2\Phi \tag{17.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1+2\Phi} = 1+\Phi = 1-\frac{GM}{Rc^2} \qquad \left[\text{Ann.: } \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} > 0\right]$$

$$\tau = \left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right)t \qquad [\text{da } \tau(0)=0] \tag{17.2}$$

$\rightsquigarrow \quad \tau < t \qquad (t \quad \widehat{=} \quad R = \infty)$
Mit wachsendem R wird τ für $t > 0$ größer ($\partial\tau/\partial R = GMt/R^2c^2 > 0$), also laufen Uhren umso schneller, je größer R.

(b) Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{1}{2}\left[(1+2\Phi)\,c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - (1-2\Phi)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(1+2\Phi)\,c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - (1-2\Phi)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right],$$

wobei die letzte Zeile aus $\vartheta = \pi/2$ folgt.

Zyklische Koordinaten: t und φ

$$(1+2\Phi)\,c^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = Ac^2 = \text{const.}\ (>0) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{A}{1+2\Phi} = A(1-2\Phi) \tag{17.3}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = B = \text{const.} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{B}{r^2} \tag{17.4}$$

Kreisbahnbedingung $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau = 0 \rightsquigarrow \mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\tau^2 = 0$
und beides zusammen $\rightsquigarrow \partial L/\partial r = 0$:

$$\Phi'(r)c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0 \tag{17.5}$$

Hieraus ist $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ direkt berechenbar. Insofern ist die Aufgabe schlecht gestellt, weil man die Integrationskonstanten A und B zur Bestimmung von $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ gar nicht braucht. Besser wäre es gewesen, nach $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ zu fragen. Denn ein Ziel der Aufgabe war das Üben des Standardwegs beim Lösen der Bewegungsgleichungen, der auch dann funktioniert, wenn sich diese nicht auf Zwei-Term-Relationen reduzieren.

Hier kann man einfach mit $(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t)^2/r$ durchmultiplizieren und erhält:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = c^2\frac{\Phi'(r)}{r} = \frac{GM}{r^3} \underset{r=R}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} \tag{17.6}$$

Angenommen, wir hätten diese Abkürzung nicht gefunden oder wir wollten zuerst $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ berechnen. Einsetzen von (17.3) und (17.4) in (17.5) liefert:

$$\Phi'(r)c^2\left(\frac{A}{1+2\Phi}\right)^2 - \frac{B^2}{r^3} = 0\,. \tag{17.7}$$

Das ist eine Beziehung zur Bestimmung von A und B als Funktion von r. Die zweite folgt aus

$$\begin{aligned}
2L = c^2 &= (1+2\Phi)\,c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \\
c^2 &= c^2\frac{A^2}{1+2\Phi} - \frac{B^2}{r^2} \\
\Rightarrow \quad \frac{A^2}{1+2\Phi} &= 1 + \frac{B^2}{c^2r^2}
\end{aligned} \tag{17.8}$$

in (17.7):

$$\Phi'(r)c^2\left(1+\frac{B^2}{c^2r^2}\right)\frac{1}{1+2\Phi} - \frac{B^2}{r^3} = 0$$

$$\Phi \ll 1,\ \Phi'(r) = \frac{GM}{r^2c^2} = -\frac{\Phi}{r} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Phi'}{1+2\Phi} \approx \Phi',\ \text{also}$$

$$\Phi'(r)c^2 + \frac{B^2}{r^3}\left(-1 + r\Phi'(r)\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
B^2 &= \frac{c^2r^3\Phi'(r)}{1-r\Phi'(r)} = -\frac{c^2r^2\Phi(r)}{1+\Phi(r)} \approx -r^2c^2\Phi(r) = GMr \\
B &= \pm rc\sqrt{|\Phi|} \qquad (17.9) \\
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{B}{r^2} = \pm\frac{c}{r}\sqrt{|\Phi|} = \pm\sqrt{\frac{GM}{r^3}}
\end{aligned}$$

$$r = R: \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} \tag{17.10}$$

nichtrelativistische Näherung! (kein c in der Formel, entspricht dem Ergebnis aus der newtonschen Mechanik)

Zur Berechnung von $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ braucht man dann auch noch die Konstante A (allerdings liegt die Vermutung nahe, dass in der gegenwärtigen Näherungsqualität $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$).

$$\text{(17.8)} \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2}{1+2\Phi} = 1 + \frac{B^2}{c^2 r^2} \underset{(17.9)}{=} 1 - \Phi$$

$$A^2 = (1+2\Phi)(1-\Phi) = 1 + \Phi \qquad A = 1 + \frac{\Phi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \underset{(17.3)}{=} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\frac{1+2\Phi}{A} = \pm\frac{c}{R}\sqrt{|\Phi|}\frac{1+2\Phi}{1+\Phi/2}$$

$$\approx \pm\frac{c}{R}\sqrt{|\Phi|} + \mathcal{O}\left(|\Phi|^{3/2}\right)$$

(Für eine bessere Näherung müssten wir an diversen Stellen weiter rechnen. (17.8) ist noch „exakt“ – aber die Metrik selbst ist bereits in Φ linearisiert, also lohnt der Aufwand nicht.)

(c) Umlaufzeit:

$$T_u = \frac{2\pi}{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}} = 2\pi\frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

wobei $R = 20183\ \text{km} + 6370\ \text{km} = 26553\ \text{km}$.

Zwecks Vergleich mit der Uhr am Pol: Berechnung der Koordinatenzeit

$$\Delta t_u = T_u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = T_u\frac{1+\Phi/2}{1+2\Phi} = T_u\left(1 - \frac{3}{2}\Phi(R)\right)$$

Man beachte: für die Berechnung der Absolutzeiten T_u oder Δt_u ist es egal, ob wir von $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau$ oder $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ ausgehen. Wenn wir aber die beiden Zeiten vergleichen wollen, müssen wir den Faktor $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ berücksichtigen, denn da sind wir gerade an einer sehr kleinen Zeitdifferenz interessiert.

Uhr am Pol (also auf der Erde und unbewegt, d.h. ϑ, φ konstant, Formel (17.2) ist deshalb anwendbar):

$$T_E = \Delta t_u\left(1 + \Phi(R_E)\right),$$

wobei $R_E = 6370$ km. Also:

$$T_u - T_E = T_u\left[1 - (1+\Phi(R_E))\left(1 - \frac{3}{2}\Phi(R)\right)\right] = T_u\left[|\Phi(R_E)| - \frac{3}{2}|\Phi(R)|\right]$$

Zahlenwerte:

$$T_u = 2\pi\frac{(2.6553)^{3/2}\times 10^{21/2}\text{m}^{3/2}}{\sqrt{6.67\times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\times 5.97\times 10^{24}\text{kg}}} = 4.308\times 10^4\text{s}$$

$$T_u = 11.96\text{h}$$

(Nach zwei Umläufen ist der Satellit wieder über derselben Stelle der Erdoberfläche.)

$$|\Phi(R_E)| = \frac{GM}{R_E\,c^2} = \frac{6.67\times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\times 5.97\times 10^{24}\text{kg}}{6.37\times 10^6\text{m}\times 9\times 10^{16}\text{m}^2\text{s}^{-2}} = 6.946\times 10^{-10}$$

$$|\Phi(R)| = \frac{GM}{R\,c^2} = \frac{6.67\times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\times 5.97\times 10^{24}\text{kg}}{2.66\times 10^7\text{m}\times 9\times 10^{16}\text{m}^2\text{s}^{-2}} = 1.667\times 10^{-10}$$

$$T_u - T_E = 4.31 \times 10^4 \mathrm{s} \times (6.946 - 1.5 \times 1.667) \times 10^{-10} = 19.16\,\mu\mathrm{s}$$

(Trotz der Bewegung des Satelliten, die eine speziell relativistische Uhrenverlangsamung zur Folge hat, gehen Borduhren schneller als eine Uhr am Pol, denn $|\Phi(R_E)| > \frac{3}{2}\,|\Phi(R)|$.)