Teil A

5. Dipol-Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung **6 Pkt.**

Die kosmische Hintergrundstrahlung (KMH – kosmischer Mikrowellenhintergrund) ist sehr homogen. Die größten Abweichungen von der Homogenität ($\approx 0.1\,\%$) sind richtungsabhängig und entstehen durch die Bewegung der Erde relativ zur Hintergrundstrahlung. Weitere Abweichungen ($\approx 10^{-3}\,\%$) entstanden durch Dichteschwankungen und damit verbundene Schwankungen der Raumkrümmung zum Zeitpunkt, als Photonen und Materie entkoppelten.

(a) Ein relativ zum Schwerpunkt des KMH ruhender Beobachter O sieht ein Schwarzkörper-Spektrum mit isotroper Temperaturverteilung. Die spektrale Energiedichte des Schwarzkörper-Spektrums bei der Temperatur T wird mit der Planck-Verteilung beschrieben (4 Pkt.)

$$U = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{5.1}$$

Zeigen Sie, dass ein Beobachter O', der sich relativ zur kosmischen Hintergrundstrahlung mit einer Geschwindigkeit v bewegt und Beobachtungen in einer durch einen Winkel ϑ' zu seiner Bewegungsrichtung gegebenen Richtung durchführt,[1] in seinem System ein Schwarzkörper-Spektrum mit der Temperatur T' wahrnimmt, die zur Temperatur T im Ruhesystem den folgenden Zusammenhang erfüllt

$$T' = \frac{T}{\gamma\,(1 - \beta\cos\vartheta')} \qquad \left[\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}\right]. \tag{5.2}$$

Hinweis: Es ist nützlich, sich vorzustellen, dass die Strahlung senkrecht auf einen Detektor mit gegebener Fläche einfällt, und dann zu berechnen, wie groß eine Fläche senkrecht zur Bewegungsrichtung des Beobachters sein muss, auf die dieselben Photonen (nun schräg) fallen. Diese senkrechte Fläche ist im Bezugssystem des Beobachters und dem der Strahlung[2] gleich groß, weil für sie die Längenkontraktion keine Rolle spielt. Dann ist es sinnvoll, sich zu überlegen, wieviele aus einem Raumwinkelelement kommende Photonen der Detektor pro Zeitintervall $\mathrm{d}t'$ empfängt. Dieselbe Photonenzahl muss ein relativ zur Strahlung ruhender Beobachter sehen, aber er drückt sie mithilfe der spektralen Photonendichte in seinem Bezugssystem aus. Gleichsetzung und Verwendung von aus den Lorentztransformationen (und/oder der Aberrationsformel) folgenden Beziehungen liefert eine Beziehung zwischen den Photonendichten in den beiden Bezugssystemen, die sich mithilfe der Planck-Verteilung in eine für die beobachteten Temperaturen umrechnen lässt. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Photonendichte von der Energiedichte unterscheidet (die einen zusätzlichen Faktor $h\nu$ enthält). Außerdem sei bemerkt, dass (5.1) die Energiedichte im Volumen beschreibt. Hier betrachten wir die Photonendichte für ein Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ und müssen damit noch durch 4π dividieren.

(b) Diese aufgrund der Relativbewegung (der Erde) zum Ruhsystem des kosmischen Mikrowellenhintergrunds auftretende Winkelabhängigkeit entspricht bis zur ersten (2 Pkt.)

[1] Wegen der Aberration bedeutet dies, dass die Strahlung aus der Sicht der Quelle unter einem Winkel ϑ ausgesandt wurde, wobei $\cos\vartheta' = (\cos\vartheta + v/c)/(1 + (v/c)\cos\vartheta)$.

[2] Also dem Bezugssystem eines Beobachters, für den die Strahlung isotrop ist.

Ordnung in β der Dipol-Anisotropie

$$T(\vartheta') = T_0(1 + \beta \cos \vartheta'). \tag{5.3}$$

Die Dipol-Anisotropie wird mit maximal ${}^{\Delta T}/_{T} = {}^{T'_{max} - T}/_{T} = 1.2 \cdot 10^{-3}$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Ruhsystem des kosmischen Mikrowellenhintergrunds.

6. Chandrasekhar-Masse **11 Pkt.**

Wenn ein Stern seinen nuklearen Brennstoff erschöpft hat, bleibt ihm als einzige Möglichkeit, den durch die Gravitation erzeugten Druck auszugleichen, der Widerstand, den ein Fermigas aufgrund des paulischen Ausschließungsprinzips seiner Kompression entgegensetzt. Ein entartetes Fermigas hat selbst bei verschwindender Temperatur noch einen endlichen Druck.

Wie Chandrasekhar zeigte, reicht dieser Gegendruck nicht aus, den Stern zu stabilisieren, wenn seine Masse einen gewissen Grenzwert überschreitet. Unterhalb dieser Grenzmasse ist das Endstadium des Lebens eines Sterns die Existenz als Weißer Zwerg, dessen mechanisches Gleichgewicht durch die Entartung des Elektronengases aufrecht erhalten wird. Liegt die Masse des Sterns oberhalb der Grenzmasse, so kann durch Rekombination von Elektronen und Protonen zu Neutronen aus dem Weißen Zwerg ein Neutronenstern mit mehr als milliardenfach höherer Dichte entstehen, stabilisiert durch den Entartungsdruck der Neutronen. Ist jedoch die Masse zu hoch, so reicht auch dieser Druck nicht zur Stabilisierung des Sterns und es entsteht ein schwarzes Loch.

Wir wollen in dieser Aufgabe einige der Überlegungen nachvollziehen, die die Existenz einer Grenzmasse zeigen und diese auch abschätzen.

(a) Begründen Sie, dass für mechanisches Gleichgewicht einer kugelsymmetrischen Massenverteilung unter ihrer Eigengravitation gelten muss (2 Pkt.)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}\,, \tag{6.1}$$

wo $p(r)$ der Druck im Abstand r vom Zentrum, $m(r)$ die in der Kugel vom Radius r eingeschlossenen Teilmasse und $\rho(r)$ die lokale Dichte beim Abstand r ist. G ist die Gravitationskonstante.
Hinweis: Betrachten Sie die Kräfte auf ein Volumenelement $\mathrm{d}A\,\mathrm{d}r$ zwischen den Orten r und $r + \mathrm{d}r$.

(b) Zeigen Sie dann (1 Pkt.)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = -G\frac{m(r)}{4\pi r^4}\,. \tag{6.2}$$

Hinweis: Was ist $\mathrm{d}m/\mathrm{d}r$ für eine Kugelschale?

(c) Zeigen Sie, dass der Ausdruck (3 Pkt.)

$$\tilde{p} = p + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4} \tag{6.3}$$

eine (streng) monoton fallende Funktion von r ist. Benützen Sie das, um zu zeigen, dass für den Druck p_Z im Zentrum des Sterns gelten muss

$$p_Z > \frac{GM^2}{8\pi R^4}\,, \tag{6.4}$$

wobei M und R Gesamtmasse und -radius des Sterns sind.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $\lim_{r\to 0} m(r)/r^2 = 0$.

(d) Der Entartungsdruck eines nichtrelativistischen Elektronengases ist (3 Pkt.)

$$p_E = \frac{1}{20}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e}n^{5/3}\,, \tag{6.5}$$

wobei $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg die Elektronenmasse und n die lokale Anzahldichte der Elektronen ist. [Eine grobe Näherung wäre $n = \rho/(m_e + m_p)$ mit m_p der (bekannten) Protonenmasse.] $h = 6.62 \times 10^{-34}$ Js ist das plancksche Wirkungsquantum.

Ersetzen Sie n durch die mittlere Anzahldichte des Sterns und berechnen Sie den Radius, den der Stern nicht überschreiten darf, damit der Entartungsdruck (6.5) dem Gravitationsdruck (6.4) die Waage halten kann. Nehmen Sie zwecks Erhalt eines Zahlenwerts $M = M_\odot$ an.

(e) Es zeigt sich, dass die benötigten Dichten so groß werden, dass die Elektronen aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation relativistische Geschwindigkeiten erreichen. Dann gilt aber nicht mehr die Zustandsgleichung (6.5) sondern stattdessen die relativistische Gleichung (2 Pkt.)

$$p_E = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hcn^{4/3}\,. \tag{6.6}$$

(Warum tritt hierin wohl die Elektronenmasse nicht mehr auf?)

Wieso kann der Stern nun den Gravitationsdruck (6.4) nicht mehr durch Verkleinerung seines Radius ausgleichen? Wie groß ist die Masse, oberhalb derer p den Wert p_Z nicht mehr erreichen kann? Wie viele Sonnenmassen $M_\odot$ sind das? Unser Ergebnis ist natürlich nur eine Näherung. Wie könnte man es im Prinzip verbessern?

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

3. Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors **7 Pkt.**

Der riemannsche Krümmungstensor ist in der Vorlesung definiert durch

$$R^{i}{}_{klm} = \Gamma^{i}{}_{km\,,l} - \Gamma^{i}{}_{kl\,,m} + \Gamma^{n}{}_{km}\Gamma^{i}{}_{nl} - \Gamma^{n}{}_{kl}\Gamma^{i}{}_{nm}\,.$$

Für eine Diskussion aller Symmetrien des Tensors ist es nützlich, alle seine Indizes kovariant zu machen, d.h. $R_{iklm} = g_{ij}R^{j}{}_{klm}$ zu betrachten. Beweisen Sie die im Folgenden aufgeführten Symmetrierelationen:

(a) $R_{iklm} = -R_{ikml}$ (1 Pkt.)

(b) $R_{iklm} = -R_{kilm}$ (3 Pkt.)

(c) $R_{iklm} = R_{lmik}$ (2 Pkt.)

(d) $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$ (1 Pkt.)

4. Kovariante Ableitung und Metrik **2 Pkt.**

Ableitungen nach Koordinaten werden in der allgemeinen Relativitätstheorie gern in einer „Komma-Notation“ dargestellt:

$$A_{,l} \equiv \partial_l A = \frac{\partial}{\partial x^l} A\,.$$

Ableitungen von Tensoren ergeben im Allgemeinen nicht wieder Tensoren. Zwecks Erhalt eines mit einer Ableitung verknüpften Tensors verwendet man die *kovariante Ableitung*, für die sich eine „Strichpunkt-Notation“ eingebürgert hat:

$$\begin{aligned}
A_{;l} &= A_{,l}\,, \\
A_{k;l} &= A_{k,l} - \Gamma^m_{kl} A_m\,, \\
A_{jk;l} &= A_{jk,l} - \Gamma^m_{jl} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{jm}\,, \\
A^k_{;l} &= A^k_{,l} + \Gamma^k_{ml} A^m\,, \\
A^{jk}_{;l} &= A^{jk}_{,l} + \Gamma^j_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{jm}\,, \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Man zeige, dass die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet:

$$g_{jk;l} = 0\,.$$

Im Teil B können **9 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.