

Teil A

3. Pauli-Matrizen

4 Pkt.

In Aufgabe B2 wurden die Pauli-Matrizen definiert und gezeigt, dass gilt

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} \mathbb{1}_2 + i \varepsilon_{ijk} \sigma^k, \quad (3.1)$$

Nun sollen weitere Eigenschaften der Pauli-Matrizen untersucht werden. Verifizieren Sie

(a) (2 Pkt.)

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

für zwei beliebige dreidimensionale Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mit zahlenwertigen Komponenten. Weiterhin ist $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ ein Vektor mit den Pauli-Matrizen als operatorwertigen Komponenten.

(b) dass die Pauli-Matrizen vollständig sind, d.h. jede 2×2 -Matrix als Linearkombination der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2$ und der σ^i ausgedrückt werden kann. (2 Pkt.)

Lösung:

(a) Um das Produkt auszuwerten, machen wir uns zunächst klar, was die Skalarprodukte bedeuten. Wir bezeichnen die Komponenten der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mit a_i bzw. b_j :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 \sigma^i a_i \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^3 \sigma^j b_j$$

Damit ergibt sich das Produkt der beiden Skalarprodukte zu:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) &= \sum_{i,j=1}^3 \sigma^i \sigma^j a_i b_j \stackrel{(3.1)}{=} \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \mathbb{1}_2 a_i b_j + \sum_{i,j,k=1}^3 i \varepsilon_{ijk} \sigma^k a_i b_j \\ &= \mathbb{1}_2 \sum_{i=1}^3 a_i b_i + i \sum_{k=1}^3 \left(\sigma^k \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} a_i b_j \right) = \mathbb{1}_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die a_i und b_j lediglich Zahlen sind, die wir an den σ^i vorbeiziehen können.

(b) Um zu zeigen, dass die drei Pauli-Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis der 2×2 -Matrizen bilden, werden wir für eine beliebige Matrix die Linearkombination aus den vier Matrizen bestimmen. Wenn uns dies gelingt, haben wir einen konstruktiven Beweis für die Vollständigkeit. Wir versuchen also, die unbekanntenen Koeffizienten α_i , $i = 0, \dots, 3$ so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned} M &\equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_0 \mathbb{1}_2 + \alpha_1 \sigma^1 + \alpha_2 \sigma^2 + \alpha_3 \sigma^3 \\ &= \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt. Aus dieser Gleichung ergeben sich die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= \alpha_0 + \alpha_3 & d &= \alpha_0 - \alpha_3 \\ b &= \alpha_1 - i\alpha_2 & c &= \alpha_1 + i\alpha_2 \end{aligned}$$

Durch entsprechende Addition bzw. Subtraktion von jeweils zwei dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{a+d}{2} & \alpha_1 &= \frac{b+c}{2} \\ \alpha_2 &= i \frac{b-c}{2} & \alpha_3 &= \frac{a-d}{2} \end{aligned}$$

Damit sind die vier Matrizen eine Basis des $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Anmerkung: Man kann die Koeffizienten auch sehr schnell mit Hilfe des auf dem Vektorraum der 2×2 -Matrizen definierten Skalarprodukts $\langle A | B \rangle = \text{Sp}(A^\dagger B)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} \text{Sp}(M) & \alpha_1 &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma^1 M) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma^2 M) & \alpha_3 &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma^3 M). \end{aligned}$$

Dass dies richtig ist, folgt daraus, dass die Quadrate der Spinmatrizen die Einheitsmatrix liefern, das Produkt zweier verschiedener Spinmatrizen wieder eine Spinmatrix ist und die Spur der Spinmatrizen jeweils verschwindet. Das Ergebnis stimmt natürlich mit dem oben berechneten überein, für die Basiseigenschaft wichtig ist aber nur, dass die rechte Seite keine unerlaubten Rechenoperationen enthält und jeweils eindeutig bestimmt ist.

Die Vollständigkeitsrelation in diesem Hilbertraum der 2×2 -Matrizen lautet:

$$M = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_2 \text{Sp}(M) + \sum_{i=1}^3 \sigma^i \text{Sp}(\sigma^i M) \right)$$

oder (ohne M)

$$\frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_2 \text{Sp}(\bullet) + \sum_{i=1}^3 \sigma^i \text{Sp}(\sigma^i \bullet) \right) = \mathbb{1}_2 \bullet,$$

und in bracket-Schreibweise

$$\frac{1}{2} \left(|\mathbb{1}_2\rangle \langle \mathbb{1}_2| + \sum_{i=1}^3 |\sigma^i\rangle \langle \sigma^i| \right) = \mathbb{1}.$$

4. Kommutatoren mit Orts- und Impulsoperator (Wiederholung)

7 Pkt.

(a) Ausgehend von der Vertauschungsrelation zwischen Orts- und Impulsoperator

(2 Pkt.)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (4.1)$$

zeige man durch vollständige Induktion, dass

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = i\hbar n \hat{p}^{n-1} \quad (4.2a)$$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n] = -i\hbar n \hat{x}^{n-1} \quad (4.2b)$$

gilt.

- (b) Für nach Potenzen von \hat{x} und \hat{p} entwickelbare Funktionen $F(\hat{x}, \hat{p})$ beweise man die (3 Pkt.)
Regeln

$$[\hat{x}, F(\hat{x}, \hat{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{p}} \quad (4.3a)$$

$$[F(\hat{x}, \hat{p}), \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}. \quad (4.3b)$$

Man mache sich klar, dass die beiden letzten Formeln nur bei genauer Interpretation der Ableitungen nützlich sind. Insbesondere gelten wegen der Nichtvertauschbarkeit von \hat{x} und \hat{p} die üblichen Formeln für die Potenzreihenentwicklung nicht.

- (c) Verwenden Sie speziell die Formeln zur Berechnung des Kommutators $[\hat{p}, F(\hat{x}, \hat{p})]$ für (2 Pkt.)
die Operatorfunktionen $F(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{x}^4 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{x}^4$ und $F(\hat{x}, \hat{p}) = 2\hat{x}^2 \hat{p}^2 \hat{x}^2$.

Lösung:

- (a) Wir lassen der Einfachheit halber den $\hat{}$ über den Operatoren weg. Die Relationen gelten unabhängig von der Darstellung. Der Induktionsanfang ist mit $[x, p] = i\hbar$ für beide Beweise gegeben. Nimmt man jeweils das zu Zeigende als Induktionsvoraussetzung, dann ist

$$\begin{aligned} [x, p^{n+1}] &= x p^n p - p^n p x = [x, p^n] p + p^n x p - p^n p x \\ &= i\hbar n p^{n-1} p + p^n [x, p] = i\hbar n p^n + p^n i\hbar \\ &= i\hbar (n+1) p^n \end{aligned}$$

und analog rechnet man für

$$\begin{aligned} [p, x^{n+1}] &= p x^n x - x^n x p = [p, x^n] x + x^n p x - x^n x p \\ &= -i\hbar n x^{n-1} x + x^n [p, x] = -i\hbar n x^n - i\hbar x^n \\ &= -i\hbar (n+1) x^n \end{aligned}$$

aus. Damit sind die ersten beiden Beweise geglückt.

- (b) Für die nächsten beiden Beweise entwickeln wir $F(x, p)$ in eine doppelte Taylorreihe. Diese können wir immer in die Form

$$F(x, p) = \sum_{m,n} c_{mn} x^m p^n \quad (4.4)$$

bringen. Stehen die Operatoren x und p ursprünglich in einer anderen Reihenfolge, so lässt sich durch sukzessives Anwenden der Vertauschungsrelationen immer erreichen, dass alle Faktoren x nach links kommen.

Beispiel: $F(x, p) = p^2 x^2 = x^2 p^2 - 2i\hbar x p$.

Das Beispiel zeigt auch, dass die Entwicklung sich nicht mehr ohne Weiteres mithilfe der Ableitungen von $F(x, p)$ nach x und p an der Stelle $x = 0, p = 0$ schreiben lässt:

$$F(x, p) \neq \frac{1}{4} \partial_p^2 \partial_x^2 F(x, p)|_{p=0, x=0} x^2 p^2 = x^2 p^2.$$

A priori ist nicht einmal klar, in welcher Reihenfolge die partiellen Ableitungen hier zu nehmen sind, denn wir können nicht ohne Weiteres voraussetzen, dass die Ableitungen nach den beiden verschiedenen Operatoren miteinander vertauschen. Man rechnet aber leicht nach, dass für allgemeine $F(x, p)$, die sich wie in (4.4) als Doppelreihen über x und p schreiben lassen, partielle Ableitungen nach p und x tatsächlich vertauschen, sofern man nur ∂_p an x „vorbeischieben“ darf.

Für die folgenden Überlegungen genügt es aber zu wissen, dass eine Entwicklung der obigen Form existiert, wir brauchen nicht die genaue Kenntnis der Koeffizienten. Rechnen wir also drauf los:

$$\begin{aligned} [x, F(x, p)] &= \sum_{m,n} c_{mn} [x, x^m p^n] \\ &= \sum_{m,n} c_{mn} (x^m x p^n - x^m p^n x) \\ &= \sum_{m,n} c_{mn} x^m [x, p^n] = \sum_{m,n} c_{mn} i\hbar x^m n p^{n-1} = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass wir die partielle Ableitung bezüglich p an der Potenz x^m vorbeischieben dürfen.

$$\begin{aligned} [F(x, p), p] &= \sum_{m,n} c_{mn} [x^m p^n, p] \\ &= \sum_{m,n} c_{mn} (x^m p p^n - p x^m p^n) \\ &= \sum_{m,n} c_{mn} (-[p, x^m] p^n) = \sum_{m,n} c_{mn} i\hbar m x^{m-1} p^n = i\hbar \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$

(c) Setzen wir nun $F(x, p) = x^4 p^2 + p^2 x^4$, so gilt

$$\begin{aligned} [p, F(x, p)] &= -[F(x, p), p] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x^4 p^2 + p^2 x^4) = -4i\hbar (x^3 p^2 + p^2 x^3) \\ &= -8i\hbar x^3 p^2 - 24\hbar^2 x^2 p + 24i\hbar^3 x \end{aligned}$$

während $F(x, p) = 2x^2 p^2 x^2$ auf

$$\begin{aligned} [p, F(x, p)] &= -[F(x, p), p] = -2i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x^2 p^2 x^2) = -4i\hbar (x p^2 x^2 + x^2 p^2 x) \\ &= -8i\hbar x^3 p^2 - 24\hbar^2 x^2 p + 8i\hbar^3 x \end{aligned}$$

führt. (Hier haben wir Vertauschbarkeit von $\partial/\partial x$ mit p vorausgesetzt.)

Anmerkung: Da die Ableitungen nach x und p vertauschen, sollte auch für beliebige $F(x, p)$ gelten $[x, [p, F(x, p)]] = [p, [x, F(x, p)]]$. Dies ist leicht zu verifizieren. Da für lineare Operatoren A, B, C gilt

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

ist

$$[x, [p, F(x, p)]] + [p, [F(x, p), x]] + \underbrace{[F(x, p), [x, p]]}_{i\hbar} = 0$$

$$\Rightarrow [x, [p, F(x, p)]] = [p, [x, F(x, p)]].$$

Der Grund für die Vereinfachung ist also, dass der Kommutator von x und p eine c -Zahl ist, denn er führt zum Verschwinden des dritten der drei durch zyklische Vertauschung auseinander entstehenden Kommutatoren. Ohne diese Eigenschaft könnten wir aber den Kommutator mit x bzw. mit p sowieso nicht durch eine (mit einem konstanten Faktor multiplizierte) Ableitung nach der konjugierten Variable ersetzen.

5. Kontinuitätsgleichung

2 Pkt.

Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

eine Gleichung der Form einer Kontinuitätsgleichung impliziert,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Dabei ist

$$\rho = \frac{i\hbar}{mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

und

$$\mathbf{j} = \frac{-i\hbar}{m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Warum kann ρ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte gedeutet werden?

Lösung: Wir schreiben die Klein-Gordon-Gleichung zunächst in einer etwas kompakteren Form

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0. \quad (5.1)$$

Die zugehörige konjugierte Gleichung lautet

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi^* = 0. \quad (5.2)$$

Multiplizieren wir Gleichung (5.1) von links mit ψ^* und Gleichung (5.2) mit ψ und lösen die Klammern auf, erhalten wir

$$\frac{1}{c^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi^* \Delta \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{c^2} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi \Delta \psi^* + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi \psi^* = 0 \quad (5.4)$$

Da es sich bei ψ um eine c -Zahl handelt, gilt natürlich $\psi^* \psi = \psi \psi^*$. Damit liefert die Subtraktion der Gleichungen (5.3) und (5.4):

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right) - (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) = 0 \quad (5.5)$$

Wie man leicht nachrechnet, gelten

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] = \frac{m}{i\hbar} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

und

$$\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* = \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = -\frac{m}{i\hbar} \nabla \cdot \mathbf{j}$$

Damit folgt aus Gleichung (5.5) nach Multiplikation mit $(i\hbar/m)$ die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Dabei können wir aber ρ nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren, da ρ nicht positiv semidefinit ist, d.h., es kann auch negativ werden, was für eine Wahrscheinlichkeitsdichte ausgeschlossen ist.

6. Quadratwurzel des d'Alembert Operators

4 Pkt.

Der d'Alembert Operator $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ hat in Vierervektorschreibweise die Form

$$\square = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 0, \dots, 3$$

wobei die partiellen Ableitungen nach kontravarianten Komponenten des Ortsvierervektors kovariante Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

eines Vierervektors und dementsprechend die partiellen Ableitungen nach kovarianten Komponenten kontravariante Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial z'}$$

bilden. Sie sind Elemente des Vierergradienten

$$\partial_i = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \nabla \right) \quad \text{bzw.} \quad \partial^i = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, -\nabla \right) \quad \text{wobei} \quad \partial_i = \sum_j g_{ij} \partial^j, \quad \text{für } i = 0, \dots, 3$$

mit $(g_{ij}) = \text{diag}(1, -1_3)$. Ziehen Sie die Quadratwurzel aus dem d'Alembert Operator $\square = \sum_i \partial_i \partial^i$. Der resultierende Ausdruck soll linear in den Orts- und Zeitableitungen sein.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass mit noch unbekanntem orts- und zeitunabhängigen Operator γ^i , die mit dem Impulsoperator vertauschen, gilt $\sqrt{\square} = \sum_i \gamma^i \partial_i$. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten γ^i erfüllen?

Lösung: Wir wollen nun die Wurzel aus $\square = \sum_i \partial_i \partial^i$ ziehen. Dazu nehmen wir an, dass

$$\sqrt{\square} = \gamma^i \partial_i$$

mit noch unbekanntem (nicht notwendigerweise miteinander vertauschenden) Koeffizienten γ^i gilt. Quadrieren von $\gamma^i \partial_i$ ergibt

$$\square = (\gamma^i \partial_i)^2 = \gamma^i \partial_i \gamma^j \partial_j$$

Addiert man diesen Ausdruck mit sich selbst (und tauscht beim zweiten Summanden die Indizes) erhält man

$$2 \cdot \square = (\gamma^i \partial_i)^2 + (\gamma^j \partial_j)^2 = \gamma^i \partial_i \gamma^j \partial_j + \gamma^j \partial_j \gamma^i \partial_i = (\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) \partial_i \partial_j$$

Es muss gelten

$$\partial_i \partial^i = \frac{1}{2} (\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) \partial_i \partial_j \quad \Rightarrow \quad \partial^i = \frac{1}{2} (\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) \partial_j$$

Aus $\partial_i = g_{ij} \partial^j$ bzw. $\partial^i = g^{ij} \partial_j$ folgern wir, dass die Koeffizienten γ^i die folgenden Anti-Kommutator-Relationen erfüllen müssen:

$$\frac{1}{2} (\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i) = g^{ij}.$$

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

3. Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

2 Pkt.

Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi$$

mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Wie lautet die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und wie steht diese in Verbindung zur Energie-Impuls-Beziehung?

Lösung: Diese Aufgabe ist einfach zu lösen indem wir den Ansatz in die Klein-Gordon-Gleichung einsetzen. Offensichtlich ist

$$\partial_t^2 \psi = -\omega^2 \psi, \quad \partial_x^2 \psi = -k_x^2 \psi, \quad \partial_y^2 \psi = -k_y^2 \psi, \quad \partial_z^2 \psi = -k_z^2 \psi$$

mit $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Dann haben wir

$$\hbar^2 \omega^2 \psi = (\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2) \psi + m^2 c^2 \psi.$$

und können die Dispersionsrelation fast direkt ablesen

$$\hbar^2 \omega^2 = (\hbar^2 c^2 \mathbf{k}^2) + m^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad \omega = c \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}.$$

Wir vergleichen das Ergebnis mit der Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4$:

$$\hbar^2 \omega^2 \leftrightarrow E^2, \quad \hbar^2 \mathbf{k}^2 \leftrightarrow \mathbf{p}^2$$

Die Dispersionsrelation hat die gleiche Struktur wie die Energie-Impuls-Beziehung.

$$\text{Photonenenergie: } E = \hbar \omega, \quad \text{Photonenimpuls: } \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

4. Klein-Gordon Gleichung in schrödingerscher Form

6 Pkt.

- (a) Führen Sie die Klein-Gordon-Gleichung in ein gekoppeltes System zweier Differentialgleichungen über, die linear in der Zeit sind. Dazu diene der Ansatz: (2 Pkt.)

$$\psi = \phi + \chi, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2(\phi - \chi).$$

- (b) Wie lautet die Ladungsdichte $\rho' = e\rho$ ausgedrückt durch ϕ und χ ? (2 Pkt.)
 (c) Zeigen Sie, daß das gekoppelte Gleichungssystem wie folgt geschrieben werden kann: (2 Pkt.)

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{H} \right) \mathbf{\Psi} = 0.$$

Dabei ist

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2$$

Lösung:

- (a) Die Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi = 0$$

Mit dem Ansatz

$$\psi = \phi + \chi \quad \text{und} \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2(\phi - \chi)$$

können wir die zweite Zeitableitung durch

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{mc^2}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (\phi - \chi) = \frac{mc^2}{i\hbar} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)$$

ersetzen. Damit lautet die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{m}{i\hbar} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \Delta \phi - \Delta \chi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 (\phi + \chi) = 0.$$

Da wir die Ordnung der Differentialgleichung in der Zeit um eins reduziert haben, müssen wir aber noch eine zweite Differentialgleichung erfüllen. Diese ergibt sich direkt aus den beiden Gleichungen unseres Ansatzes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{mc^2}{i\hbar} (\phi - \chi).$$

Für den letzten Aufgabenteil werden wir diese Gleichung noch etwas umstellen und erweitern. Das System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen lautet somit:

$$\frac{m}{i\hbar} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \Delta \phi - \Delta \chi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 (\phi + \chi) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{m}{i\hbar} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 (\phi - \chi) = 0 \quad (4.2)$$

Dieses stellt man sinnvollerweise so um, dass die Zeitableitungen allein auf einer Seite stehen (Addieren und Subtrahieren der beiden Gleichungen):

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \phi + \Delta \chi) + mc^2 \phi \quad (4.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \phi + \Delta \chi) - mc^2 \chi \quad (4.4)$$

(b) Um die Ladungsdichte

$$\rho' = e\rho = \frac{i\hbar e}{mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

zu berechnen (die Form entnehmen wir der Aufgabe *Kontinuitätsgleichung*), setzen wir einfach

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + \chi & \psi^* &= \phi^* + \chi^* \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{mc^2}{i\hbar} (\phi - \chi) & \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{mc^2}{i\hbar} (\phi^* - \chi^*) \end{aligned}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{i\hbar}{mc^2} \left((\phi^* + \chi^*) \frac{mc^2}{i\hbar} (\phi - \chi) + (\phi + \chi) \frac{mc^2}{i\hbar} (\phi^* - \chi^*) \right) \\ &= 2e (\phi\phi^* - \chi\chi^*) = 2e (|\phi|^2 - |\chi|^2). \end{aligned}$$

Dies führt auf die natürliche Interpretation von $|\phi|^2$ als einem Beitrag positiv geladener Teilchen zur Ladungsdichte und $|\chi|^2$ als dem entsprechenden Beitrag negativ geladener Teilchen. ϕ und χ wären also „Teilwellenfunktionen“ positiv und negativ geladener Teilchen. Das heißt aber auch, dass die Klein-Gordon-Gleichung kein Einteilchensystem beschreibt.

Aber ein Mehrteilchensystem beschreibt sie nicht konsistent, denn Mehrteilchenwellenfunktionen entstehen üblicherweise nicht additiv aus Einteilchenwellenfunktionen – der Hilbertraum von Mehrteilchensystemen hat eine andere Struktur als der von Einteilchensystemen.

- (c) Die beiden Gleichungen (4.3) und (4.4) können wir auch in Matrix-Vektor-Notation wie folgt schreiben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}}_{:= -\mathbf{H} \Psi} = 0,$$

womit die zu zeigende Form erreicht wurde.

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an antonia.schulz@ovgu.de.