Teil A

7. Clifford-Algebra **6 Pkt.**

Betrachtet werden vier hermitesche $(N \times N)$-Matrizen α^a, $(a = 1, \ldots, 4)$. Die Clifford-Algebra wird definiert mittels fogender Antivertauschungsregeln:

$$\alpha^a \alpha^b + \alpha^b \alpha^a = 2\delta_{ab}\, \mathbb{1}_N .$$

($\mathbb{1}_N$ ist die Einheitsmatrix der Dimension N. In vereinfachter Notation könnte man sie auch weglassen.)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen α^a linear unabhängig sind (also dass das Verschwinden einer Linearkombination $\sum_a c_a \alpha^a$ impliziert, dass alle c_a null sind). (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass die Dimension N der antikommutierenden Matrizen α^a gerade sein muss. Warum muss $N = 2$ ebenfalls ausgeschlossen werden? (2 Pkt.)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Eigenwerte der Matrizen gleich ± 1 sein müssen. Zeigen Sie weiterhin, dass die Spur verschwinden muss, $\mathrm{Tr}\, \alpha^a = 0$.

(c) Verifizieren Sie explizit, dass folgende vierdimensionale Darstellung die Antivertauschungsregeln erfüllt: (2 Pkt.)

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, 3 , \qquad \alpha^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

mit den Paulimatrizen σ^i.

Lösung:

(a) Wir betrachten eine verschwindende Linearkombination der α^a

$$\sum_a c_a \alpha^a = 0 .$$

Um den Antikommutator zu generieren, multiplizieren wir diesen Ausdruck jeweils von rechts und links mit α^b und addieren:

$$0 = \sum_a c_a \alpha^a \alpha^b + \alpha^b \sum_a c_a \alpha^a = \sum_a c_a \left(\alpha^a \alpha^b + \alpha^b \alpha^a \right) = 2 \sum_a c_a \delta_{ab} = 2 c_b .$$

Es folgt $c_b = 0$. Lassen wir b alle vier möglichen Werte durchlaufen, so können wir schließen, dass das Verschwinden einer Linearkombination der α^a das Verschwinden ihrer Koeffizienten impliziert, was gerade lineare Unabhängigkeit bedeutet.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Dimension der Matrizen für die Clifford-Algebra gerade sein muss. Wie man aufgrund der Definition der Algebra

$$\alpha^a \alpha^b + \alpha^b \alpha^a = 2\delta_{ab}\, \mathbb{1} \tag{7.1}$$

schnell sieht, gilt:

$$\alpha^a \alpha^a = \mathbb{1} . \tag{7.2}$$

Nehmen wir nun an, der Vektor $|\psi\rangle$ sei ein Eigenvektor von α^a. Wenn λ den zughörigen Eigenwert bezeichnet, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\alpha^a |\psi\rangle &= \lambda |\psi\rangle \\
\alpha^a \alpha^a |\psi\rangle &= \lambda \alpha^a |\psi\rangle \\
\mathbb{1} |\psi\rangle &= \lambda^2 |\psi\rangle \\
1 |\psi\rangle &= \lambda^2 |\psi\rangle
\end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist das Quadrat aller Eigenwerte eins. Somit bleiben nur die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$ übrig. Um zu sehen, dass die Spur für alle α^a verschwindet, machen wir von der Linearität der Spur, deren Invarianz unter zyklischen Vertauschungen der Argumente und von Gleichung (7.1) Gebrauch. Weiterhin soll im folgenden $a \neq b$ gelten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\alpha^a\right) = \mathrm{Tr}\left(\alpha^a \mathbb{1}\right) &\underset{(7.2)}{=} \mathrm{Tr}\left(\alpha^a \alpha^b \alpha^b\right) = \mathrm{Tr}\left(\alpha^b \alpha^a \alpha^b\right) \\
&\underset{(7.1)}{=} \mathrm{Tr}\,(\underbrace{2\delta_{ab}\,\mathbb{1}\alpha^b}_{=0,\text{ da } a\neq b} - \alpha^a \underbrace{\alpha^b \alpha^b}_{=\mathbb{1}}) = \mathrm{Tr}\left(-\alpha^a\right) \\
&= -\mathrm{Tr}\left(\alpha^a\right)
\end{aligned}$$

Die einzige Zahl, die gleich ihrem negativen Wert ist, ist die Null. Damit verschwindet also die Spur der α-Matrizen. Da die Eigenwerte nur ± 1 sind, muss die Dimension also gerade sein, da genau so viele Eigenwerte $+1$ wie -1 auftauchen müssen. Den zweidimensionalen Fall können wir mit folgender Überlegung ausschließen. 2×2-Matrizen haben vier Elemente, bilden also einen vierdimensionalen Vektorraum. Da die Operatoren α^a linear unabhängig sind, müssten sie, wenn es eine zweidimensionale Darstellung gäbe, eine Basis des Vektorraums bilden, es müsste sich also jede 2×2-Matrix als Linearkombination dieser vier Matrizen darstellen lassen. Nun gilt aber

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_a c_a \alpha^a\right) = \sum_a c_a \mathrm{Tr}\left(\alpha^a\right) = 0\,,$$

d.h. die Spur jeder Linearkombination der α^a ist null. Also lässt sich die Einheitsmatrix (deren Spur N ist) nicht als Linearkombination der α^a darstellen. Man braucht also einen Raum mit mehr als vier linear unabhängigen Vektoren, es muss deshalb $N > 2$ gelten.

(c) Es bleibt noch zu überprüfen, ob die gegebenen Darstellungen der α^a Gleichung (7.1) erfüllen. Für $i, j = 1, 2, 3$ finden wir:

$$\begin{aligned}
\alpha^i \alpha^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{Aufg. Pauli-Matrizen}}{=} \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit lautet der Antikommutator

$$[\,\alpha^i, \alpha^j\,]_+ = \left(\delta_{ij} + \delta_{ji}\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\left(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik}\right) \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = 2\delta_{ij}\,\mathbb{1}$$

Die Produkte der α^i mit α^4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\alpha^i\alpha^4 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
\alpha^4\alpha^i &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow [\,\alpha^i, \alpha^4\,]_+ = 0
\end{aligned}$$

Und da

$$\begin{aligned}
\alpha^4\alpha^4 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow &\quad [\,\alpha^4, \alpha^4\,]_+ = 2 \cdot \mathbb{1}
\end{aligned}$$

haben wir Gleichung (7.1) für diese Darstellung der α-Matrizen gezeigt.

8. Levy-Leblond-Linearisierung der Schrödinger-Gleichung **8 Pkt.**

Die Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\psi = 0,$$

ist unsymmetrisch in bezug auf die Ordnung der Zeit- und Raumableitungen. Mit dem Ansatz:

$$(i\hbar a\partial_t - i\hbar b^k\partial_{x^k} + c)\psi = 0\,,$$

der in den Raumableitungen linear ist, lässt sich diese Unsymmetrie beseitigen. Die Koeffizienten a, b^1, b^2, b^3, c sind hierbei quadratische Matrizen und ψ dementsprechend ein Spaltenvektor. Man fordert, dass die Lösungen der linearen Wellengleichung zugleich Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind.

(a) Sollen beide Gleichungen simultan gelten, dann muss es einen Operator der Form (2 Pkt.)

$$i\hbar\tilde{a}\partial_t - i\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c}$$

geben, der die lineare Wellengleichung wieder in die Schrödinger-Gleichung überführt:

$$(i\hbar\tilde{a}\partial_t - i\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c})(i\hbar a\partial_t - i\hbar b^k\partial_{x^k} + c) = 2m\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right).$$

Der (willkürliche) Faktor $2m$ wird sich als zweckmäßig erweisen. Zeigen Sie durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}a &= 0 & \tilde{a}b^k + \tilde{b}^k a &= 0 & & \\
\tilde{a}c + \tilde{c}a &= 2m & \tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k &= -2\delta_{kl} & k, l &= 1, 2, 3 \\
\tilde{c}c &= 0 & \tilde{c}b^k + \tilde{b}^k c &= 0 & &
\end{aligned}$$

(b) Sei d eine invertierbare Matrix ($dd^{-1} = \mathbb{1}$) und die α^μ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ definiert mittels: (2 Pkt.)

$$\mathrm{i}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right) = d\alpha^4 \qquad \mathrm{i}\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right) = -\alpha^4 d^{-1}$$
$$b^k = d\alpha^k \qquad \tilde{b}^k = -\alpha^k d^{-1}$$

Zeigen Sie, dass die Matrizen α^μ die Antivertauschungsregeln der Clifford-Algebra (siehe Aufgabe *Clifford-Algebra*) erfüllen.

(c) Wählen Sie (2 Pkt.)

$$d = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit der Darstellung der Matrizen α^μ aus der Aufgabe *Clifford-Algebra* einen gültigen Satz von Koeffizienten $a, \tilde{a}, b^k, \tilde{b},^k c$ und $\tilde{c}$.

Hinweis: Eindeutige Lösungen erhält man etwa, wenn man ansetzt

$$a - \frac{1}{2m}\,c = -\mathrm{i}d\,, \quad \tilde{a} - \frac{1}{2m}\,\tilde{c} = -\mathrm{i}d^{-1} \quad \text{oder} \quad a - \frac{1}{2m}\,c = \mathrm{i}d\,, \quad \tilde{a} - \frac{1}{2m}\,\tilde{c} = \mathrm{i}d^{-1}\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass mit dieser Konstruktion der Koeffizienten-Matrizen die Komponenten des Vierer-Spinors $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ die Schrödinger-Gleichung erfüllen. (2 Pkt.)

Lösung:

(a) Führen wir die beiden Operatoren hintereinander aus, ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{i}\hbar\tilde{a}\partial_t - \mathrm{i}\hbar\tilde{b}^k\partial_{x^k} + \tilde{c}\right)\left(\mathrm{i}\hbar a\partial_t - \mathrm{i}\hbar b^k\partial_{x^k} + c\right)\\
&\qquad = -\hbar^2\tilde{a}a\partial_t^2 + \hbar^2\tilde{a}b^k\partial_t\partial_{x^k} + \mathrm{i}\hbar\tilde{a}c\partial_t + \hbar^2\tilde{b}^k a\partial_{x^k}\partial_t\\
&\qquad\quad - \hbar^2\tilde{b}^k b^l\partial_{x^k}\partial_{x^l} - \mathrm{i}\hbar\tilde{b}^k c\partial_{x^k} + \mathrm{i}\hbar\tilde{c}a\partial_t - \mathrm{i}\hbar\tilde{c}b^k\partial_{x^k} + \tilde{c}c\\
&\qquad = -\hbar^2\left(\tilde{a}a\right)\partial_t^2 + \hbar^2\left(\tilde{a}b^k + \tilde{b}^k a\right)\partial_{x^k}\partial_t + \mathrm{i}\hbar\left(\tilde{a}c + \tilde{c}a\right)\partial_t\\
&\qquad\quad - \hbar^2\left(\tilde{b}^k b^l\right)\partial_{x^k}\partial_{x^l} - \mathrm{i}\hbar\left(\tilde{b}^k c + \tilde{c}b^k\right)\partial_{x^k} + \tilde{c}c\\
&\qquad \overset{!}{=} 2m\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)
\end{aligned}$$

Da die neu eingeführten Operatoren weder von der Zeit noch vom Ort abhängen sollen, müssen sie mit den Differentialoperatoren ∂_t und ∂_{x^k} vertauschen. Bei dem Summanden, der das Produkt von $\tilde{b}^k\partial_{x^k}$ und $b^k\partial_{x^k}$ enthält, haben wir einen der stummen Indizes k in l umbenannt, da es sich bei beiden Termen um Summen handelt und diese Term für Term miteinander multipliziert werden müssen. Damit die Gleichung eine wahre Aussage ist, müssen Terme, die auf beiden Seiten vor denselben (linear) *unabhängigen* Operatoren stehen, die gleichen Koeffizienten haben. Der einzige Teilausdruck, bei dem man aufpassen muss, ist $-\hbar^2\tilde{b}^k b^l\partial_{x^k}\partial_{x^l}$ auf der linken Seite. Hier liefert der Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite *nicht* $\tilde{b}^k b^l = -\delta_{kl}$, weil die Operatoren $\partial_{x^k}\partial_{x^l}$ und $\partial_{x^l}\partial_{x^k}$ nicht unabhängig voneinander sind (auch wenn $k \neq l$). Es ist also nur die Summe der beiden Koeffizienten vor $\partial_{x^k}\partial_{x^l}$ und $\partial_{x^l}\partial_{x^k}$ gleich null, nicht jeder einzelne Term

$$\sum_{k,l}\left(\tilde{b}^k b^l\right)\partial_{x^k}\partial_{x^l} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left(\tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k\right)\partial_{x^k}\partial_{x^l} \stackrel{!}{=} -\sum_{k,l}\delta_{kl}\partial_{x^k}\partial_{x^l} = -\Delta.$$

Berücksichtigt man dies, so liefert der Koeffizientenvergleich:

$$\tilde{a}a = 0 \qquad (8.1) \qquad\qquad \tilde{b}^k c + \tilde{c}b^k = 0 \qquad (8.4)$$

$$\tilde{c}c = 0 \qquad (8.2) \qquad\qquad \tilde{a}c + \tilde{c}a = 2m \qquad (8.5)$$

$$\tilde{a}b^k + \tilde{b}^k a = 0 \qquad (8.3) \qquad\qquad \tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k = -2\delta_{kl} \qquad (8.6)$$

Dies sind genau die zu zeigenden Gleichungen.

(b) Wir führen nun gemäß Aufgabenstellung die Matrizen d und α^a ein durch:

$$\mathrm{i}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right) = d\alpha^4 \qquad (8.7) \qquad\qquad \mathrm{i}\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right) = -\alpha^4 d^{-1} \qquad (8.9)$$

$$b^k = d\alpha^k \qquad (8.8) \qquad\qquad \tilde{b}^k = -\alpha^k d^{-1} \qquad (8.10)$$

Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt konsistent möglich ist, eine invertierbare Matrix d und vier Matrizen zu finden, so dass die Gleichungen (8.7) bis (8.10) erfüllt sind. Wir ersetzen dabei 10 Matrizen ($\tilde{a}$, a, $\tilde{c}$, c, $\tilde{b}^k$, b^k, $k = 1\ldots3$), zwischen denen 15 Gleichungen bestehen [Gl. (8.1)-(8.6)] durch 5 Matrizen, zwischen denen 10 Gleichungen bestehen (die zu zeigenden Antikommutatorrelationen). Da wir die Anzahl der Bedingungen um den gleichen Betrag reduzieren wie die Anzahl der Variablen (= Matrizen) sollte die Aufgabe lösbar sein.

Untersuchen wir erst die Bedingungen an die α^k, $k = 1\ldots3$ die aus (8.8) und (8.10) folgen

$$\alpha^k = d^{-1}b^k = -\tilde{b}^k d$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = -\tilde{b}^k d d^{-1} b^l - \tilde{b}^l d d^{-1} b^k = -\left(\tilde{b}^k b^l + \tilde{b}^l b^k\right) = 2\delta_{kl}\,.$$

Das sind sechs der gewünschten Antikommutatorrelationen, nämlich die für die Indizes 1 bis 3. Für α^4 finden wir aus (8.7) und (8.9)

$$-\alpha^4 d^{-1} d\alpha^4 = \mathrm{i}\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right)\mathrm{i}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right)$$

$$\alpha^4\alpha^4 = \tilde{a}a + \frac{1}{2m}(\tilde{c}a + \tilde{a}c) + \frac{1}{4m^2}\tilde{c}c = 0 + \frac{1}{2m}2m + 0 = 1\,.$$

Dies ist identisch mit $\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu = 4$. Wir brauchen also nur noch die Antikommutatorrelation mit einem Index ungleich 4 und einem Index gleich 4 zu zeigen. Hierzu lösen wir zuerst (8.7) und (8.9) nach α^4 auf und setzen das Ergebnis in den gewünschten Antikommutator ein

$$\alpha^4 = \mathrm{i}d^{-1}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right) = -\mathrm{i}\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right)d$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha^k\alpha^4 + \alpha^4\alpha^k = -\tilde{b}^k d\mathrm{i}d^{-1}\left(a + \frac{1}{2m}\,c\right) + (-\mathrm{i})\left(\tilde{a} + \frac{1}{2m}\,\tilde{c}\right)dd^{-1}b^k$$

$$= (-\mathrm{i})\left[\underbrace{\tilde{b}^k a + \tilde{a}b^k}_{0} + \frac{1}{2m}\left(\underbrace{\tilde{b}^k c + \tilde{c}b^k}_{0}\right)\right] = 0 = 2\delta_{4k}\,. \qquad (*)$$

Damit haben wir für alle möglichen Kombinationen von $\mu = 1\ldots 4$ und $\nu = 1\ldots 4$ die Gültigkeit von

$$\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (8.11)$$

gezeigt, also sind die α-Matrizen Generatoren einer Clifford-Algebra.

(c) Haben wir $d = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} = d^{-1}$ und $\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$, $k = 1\ldots 3$, sowie $\alpha^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$ festgelegt, so lassen sich die b^k und $\tilde{b}^k$ direkt aus den Gleichungen (8.8) und(8.10) bestimmen (wobei wir nur die b^k wirklich brauchen)

$$b^k = d\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^k = -\alpha^k d^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = -b^k\,.$$

a, c, $\tilde{a}$ und $\tilde{c}$ kann man mithilfe des Hinweises sehr einfach ausrechnen. Da $a - \frac{1}{2m}\,c$ vorgegeben ist und man aus (8.7) durch Multiplikation mit $-\mathrm{i}$ die Summe $a + \frac{1}{2m}c$ berechnen kann, erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Formeln explizite Ausdrücke für a und c. Analog kann man $\tilde{a}$ und $\tilde{c}$ bestimmen. Hier wollen wir jedoch versuchen, ohne den Hinweis weiterzurechnen, um zu sehen, wieweit man so kommt und warum es mehrere Lösungen gibt. Mithilfe von (8.7) bzw. (8.9) können wir eine Beziehung zwischen a und c bzw. $\tilde{a}$ und $\tilde{c}$ hinschreiben:

$$a = -\mathrm{i}d\alpha^4 - \frac{1}{2m}\,c = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2m}\,c$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m}\,c \equiv W - \frac{1}{2m}\,c\,, \qquad (8.12)$$

$$\tilde{a} = \mathrm{i}\alpha^4 d^{-1} - \frac{1}{2m}\tilde{c} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m}\tilde{c}$$

$$= \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2m}\tilde{c} = W - \frac{1}{2m}\tilde{c}\,, \qquad (8.13)$$

wo wir eine neue Matrix W definiert haben, die überdies $W^2 = \mathbb{1}$ erfüllt. Nun können wir a und $\tilde{a}$ durch einfache Produktbildung eliminieren. Wegen (8.1) muss gelten

$$0 = \tilde{a}a = \left(W - \frac{1}{2m}\tilde{c}\right)\left(W - \frac{1}{2m}c\right) = W^2 - \frac{1}{2m}(\tilde{c}W + Wc) + \frac{1}{4m^2}\underbrace{\tilde{c}c}_{(8.2)\Rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \tilde{c}W + Wc &= 2m\mathbb{1} && (8.14)\\ \tilde{c}W^2 + WcW &= 2mW && \Big| \cdot c \\ \underbrace{\tilde{c}c}_{0} + WcWc &= 2mWc \\ (Wc - 2m\mathbb{1})Wc &= 0\,. && (8.15) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (8.15) folgt, dass die Matrix Wc nur die Eigenwerte 0 oder $2m$ haben kann. Denn eine Ähnlichkeitstransformation (Eigenwerte bleiben erhalten), die Wc auf Jordansche Normalform bringt, bringt offenbar auch $Wc - 2m\mathbb{1}$ auf Jordansche Normalform (Einheitsmatrix bleibt unverändert)

$$U^{-1}(Wc)U = (Wc)^d = \begin{pmatrix} i & \hat{j} \\ 0 & k \end{pmatrix}, \qquad (Wc)^d - 2m\mathbb{1} = \begin{pmatrix} i-2m & \hat{j} \\ 0 & k-2m \end{pmatrix}.$$

In dieser Darstellung sind Wc und $Wc - 2m\mathbb{1}$ beides obere Dreiecksmatrizen, ihr Produkt ist wieder eine obere Dreiecksmatrix und auf der Diagonale stehen die Faktoren aus Eigenwerten $(\lambda_i - 2m)\lambda_i$

$$\left[(Wc)^d - 2m\mathbb{1}\right](Wc)^d = \begin{pmatrix} (i-2m)i & \dots \\ 0 & (k-2m)k \end{pmatrix} = 0\,.$$

Soll das die Nullmatrix ergeben, so muss jedes Diagonalelement null sein, also gilt für die Eigenwerte: $\lambda_i = 0$ oder $\lambda_i = 2m$. Da wir nicht erwarten, dass das Problem eindeutig lösbar ist, setzen wir eine offensichtliche Lösung an und verifizieren sie. Zum Beispiel erfüllt

$$Wc = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

die Gleichung (8.15). Durch Multiplikation von links mit W ergibt sich

$$c = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2m\mathbb{1} \end{pmatrix} = 2m\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{c}$ erhält man mithilfe von (8.14)

$$\tilde{c} = (2m\mathbb{1} - Wc)W = \begin{pmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = 2m\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c\,.$$

Schließlich erhält man a und $\tilde{a}$ aus (8.12) und (8.13)

$$a = \tilde{a} = W - \frac{1}{2m}c = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{aligned} &b^k = -\tilde{b}^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ &a = \tilde{a} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \tilde{c} = 2m\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}} \tag{8.17}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch mit dem Ansatz $a - \frac{1}{2m}c = -\mathrm{i}d$, $\tilde{a} - \frac{1}{2m}\tilde{c} = -\mathrm{i}d^{-1}$. Der andere Ansatz $a - \frac{1}{2m}c = \mathrm{i}d$, $\tilde{a} - \frac{1}{2m}\tilde{c} = \mathrm{i}d^{-1}$ entspricht der Wahl $Wc = 2m\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und führt zu $a = \tilde{a} = \mathrm{i}\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $c = \tilde{c} = -2m\mathrm{i}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bei natürlich ungeänderten b^k und $\tilde{b}^k$.

Anmerkung: Man muss nach Ableiten einer Lösung im Grunde noch die Probe machen, ob es sich nicht um eine Scheinlösung handelt. Zum Beispiel sieht es auf den ersten Blick so aus, als spräche nichts dagegen,

$$Wc = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu setzen. Dann wird $\tilde{c}$ eine reguläre Matrix:

$$\tilde{c} \underset{(8.14)}{=} 2mW = 2m\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

a wird wegen (8.12) gleich W und $\tilde{a}$ wegen (8.13) gleich der Nullmatrix.

$$a = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nur leider erfüllen diese Operatoren nicht mehr die Relationen (8.3) und (8.4). Die Antikommutatorrelation ($*$) bleibt erfüllt, aber das geschieht nicht, indem die beiden mit einer geschweiften Klammer zusammengefassten Einzelausdrücke null werden, sondern, indem nur ihre Summe verschwindet. Genauso würde $Wc = \left(\begin{smallmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 2m\mathbb{1} \end{smallmatrix}\right)$ zu Ergebnissen führen, die nicht mehr (8.3) und (8.4) erfüllen. Das Ergebnis (8.17) und auch die mit $Wc = \left(\begin{smallmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhaltene Alternative sind aber korrekt, wie man leicht nachrechnet.

(d) Um zu zeigen, dass die Komponenten des Bispinors

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

die Schrödinger-Gleichung

$$\left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\psi = 0 \tag{8.18}$$

erfüllen, werden wir den Bispinor durch die beiden Spinoren

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

darstellen und zeigen, dass diese beiden Gleichung (8.18) erfüllen. Hierbei werden wir davon ausgehen, dass die Differentialoperatoren auf jede Komponente einzeln wirken. Mit den Matrizen a, b^k und c aus dem vorhergehenden Aufgabenteil lautet die Ausgangsgleichung

$$\left[\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \partial_t - \mathrm{i}\hbar \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \partial_{x^k} + 2m\,\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ausmultipliziert liefert die beiden Gleichungen:

$$2m\phi = \hbar\sigma^k \partial_{x^k}\chi \tag{8.19}$$

$$\partial_t \chi = \mathrm{i}\sigma^k \partial_{x^k}\phi\,. \tag{8.20}$$

Aus (8.19) erhalten wir

$$\sigma^l \partial_{x^l}\phi = \frac{\hbar}{2m}\sigma^l\sigma^k \partial_{x^l}\partial_{x^k}\chi$$

Wie man sich schnell mithilfe des Ergebnisses der Aufgabe *Pauli-Matrizen* klar macht, gilt

$$\sigma^l\sigma^k \partial_{x^l}\partial_{x^k} = \delta_{kl}\partial_{x^k}\partial_{x^l} = \Delta\,.$$

Das Verschwinden des Terms $\mathrm{i}\varepsilon_{klm}\sigma^m\partial_{x^k}\partial_{x^l}$ ist eine direkte Folge der totalen Antisymmetrie von ε_{klm}. Damit erhalten wir durch Einsetzen in (8.20)

$$\partial_t\chi = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\Delta\chi \Longleftrightarrow \left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\chi = 0\ .$$

Dies entspricht der Schrödinger-Gleichung der ersten beiden Komponenten des Bispinors. Durch Ableiten von Gleichung (8.19) nach t und Einsetzen in (8.20) gelangen wir zu

$$\partial_t\phi = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\sigma^k\sigma^l\partial_{x^k}\partial_{x^l}\phi = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\Delta\phi \Longleftrightarrow \left(\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\phi = 0\ .$$

Damit erfüllen auch die letzten beiden Komponenten des Bispinors die Schrödinger-Gleichung.

Die Lösungen zu den Aufgaben im Teil A werden zu dem unten genannten Termin hochgeladen.

Teil B

5. Vierer-Stromdichte aus Dirac-Gleichung **6 Pkt.**

Wir betrachten eine Lösung der freien Dirac-Gleichung mit positiver Energie E und $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$

$$\psi(z,t) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p_z z)}.$$

Hierbei ist N ein geeigneter Normierungsfaktor. Bestimmen Sie die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\boldsymbol{j} = (j^\mu) = c\left(\psi^\dagger \alpha^\mu \psi\right)$, $\mu = 1, 2, 3$.

Hinweis: Die α^μ sind gegeben durch $\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$, wobei σ^μ die Paulimatrizen sind.

Lösung: Wahrscheinlichkeitsstromdichte wird mit den Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

komponentenweise bestimmt:

$$(j^\mu) = cN^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(Et-p_z z)} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \cdot N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p_z z)}$$

$$= c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu = 1: \qquad j^1 = c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu = 2: \qquad j^2 = c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu = 3: \qquad j^3 = c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= c\,|N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{E+mc^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2c\,|N|^2 \frac{cp_z}{E+mc^2}$$

Damit ist nur die z-Komponente der Wahrscheinlichkeitsstromdichte ungleich Null

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c\,|N|^2 \frac{cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}.$$

6. Lösungen Klein-Gordon- versus Dirac-Gleichung **4 Pkt.**

Im feldfreien Fall ist jede Lösung der Dirac-Gleichung auch Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Lösung: Die Klein-Gordon-Gleichung (ohne Feld) lautet

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0\,, \tag{6.1}$$

die feldfreie Dirac-Gleichung

$$\left[\alpha_\mu p^\mu - \alpha^m mc\right]\boldsymbol{\psi} = 0\,, \tag{6.2}$$

wobei

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \mathbb{1}\,, \quad \alpha_k = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \; k = 1\ldots 3\,, \quad \alpha^m = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Zunächst sollte man sich klarmachen, was es überhaupt bedeuten soll, dass die Lösung einer vektoriellen Gleichung wie (6.2) auch Lösung einer skalaren Gleichung ist und insbesondere, was die Umkehrung heißen soll. Offensichtlich *kann* ein Skalar nicht Lösung einer vektoriellen Gleichung sein! Andererseits ist es einfach, aus einer skalaren Gleichung wie (6.1) eine vektorielle zu machen: man schreibt einfach statt ψ den Vektor $\boldsymbol{\psi}$ und fordert die Gültigkeit der skalaren Gleichung für jede Komponente. Die Aussage lautet also: Wenn wir unter (6.1) eine vierkomponentige Gleichung verstehen, dann ist jede Lösung von (6.2) eine Lösung von (6.1), aber nicht jede Lösung von (6.1) ist auch Lösung von (6.2).

Da die skalare Gleichung einfacher aussieht, bestimmen wir zunächst eine einigermaßen allgemeine Klasse von Lösungen für sie. Dann suchen wir uns eine möglichst einfache dieser Lösungen heraus, die Gleichung (6.2) nicht löst.

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Für so eine Gleichung führt ein Produktansatz zu Lösungen, und da wir bereits wissen, dass wir Wellenlösungen bekommen müssen, schreiben wir diesen direkt in Form einer ebenen Welle:

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega t)}\,.$$

Einsetzen in (6.1) liefert

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \boldsymbol{k}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega t)} = 0\,,$$

was bedeutet, dass die ebene Welle (für nichtverschwindendes A) eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist, wann immer die *Dispersionsrelation*

$$\omega^2 = c^2\boldsymbol{k}^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \tag{6.4}$$

erfüllt ist. Das heißt, es gibt Lösungen in Form ebener Wellen für beliebige (reelle) Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$, deren Frequenz mit dem Wellenvektor (bis auf endliche Multiplizität) festgelegt ist: $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$. In unserem Fall gibt es jeweils zwei Lösungen, eine mit positiver und eine mit negativer Frequenz. Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung lässt sich durch Superposition von solchen ebenen Wellen gewinnen. Setzen wir die Klein-Gordon-Gleichung für einen vierkomponentigen Bispinor an, um mit der Dirac-Gleichung vergleichen zu können, so wird einfach der Vorfaktor der ebenen Welle ein beliebiger vierkomponentiger Vektor und die einzige sonstige Bedingung an die Lösung ist, dass ω die Dispersionsrelation (6.4) erfüllt.

Um zu überprüfen, ob diese Lösung auch die Dirac-Gleichung erfüllt, setzen wir sie in (6.2) ein:

$$\begin{aligned}\Bigg\{ \mathrm{i}\hbar \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & \mathbb{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\right]\\ - mc\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\Bigg\} \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t)} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \Bigg\{ \frac{\hbar\omega}{c}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix} - \hbar k_x \begin{pmatrix}\sigma_x\begin{pmatrix}A_3\\A_4\end{pmatrix}\\ \sigma_x\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} - \hbar k_y \begin{pmatrix}\sigma_y\begin{pmatrix}A_3\\A_4\end{pmatrix}\\ \sigma_y\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} - \hbar k_z \begin{pmatrix}\sigma_z\begin{pmatrix}A_3\\A_4\end{pmatrix}\\ \sigma_z\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\ - mc\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\-A_3\\-A_4\end{pmatrix}\Bigg\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kx}-\omega t)} = 0\end{aligned}$$

Der Exponentialfaktor ist immer ungleich null, kann also abdividiert werden und wir erhalten nach Multiplikation mit c:

$$\hbar\omega \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ -A_3 \\ -A_4 \end{pmatrix} - \hbar c k_x \begin{pmatrix} A_4 \\ A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} - \hbar c k_y \begin{pmatrix} -\mathrm{i}A_4 \\ \mathrm{i}A_3 \\ -\mathrm{i}A_2 \\ \mathrm{i}A_1 \end{pmatrix} - \hbar c k_z \begin{pmatrix} A_3 \\ -A_4 \\ A_1 \\ -A_2 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{6.5}$$

Dies ist ein Eigenwertproblem, das Eigenwerte ω_ν, $\nu = 1\ldots 4$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{A}_\nu$ bestimmt. Die Eigenwerte und Eigenvektoren werden in der Vorlesung für den Fall $k_x = k_y = 0$ berechnet.

Für die Lösung der Aufgabe brauchen wir uns aber nicht weiter in das Eigenwertproblem zu vertiefen. Es genügt, eine Eigenlösung von (6.1) zu finden, die das aus (6.2) resultierende Eigenwertproblem nicht löst. Setzen wir etwa $\boldsymbol{A} = (1,0,0,0)^T$. Dann folgt aus der ersten Zeile von (6.5) $\hbar\omega = mc^2$, aus der dritten $k_z = 0$ und aus der vierten $k_x + \mathrm{i}k_y = 0$. Nun hat die Klein-Gordon-Gleichung aber Lösungen in der Form ebener Wellen mit $\boldsymbol{A} = (1,0,0,0)^T$ und *beliebigem* Wellenvektor $\boldsymbol{k}$. Alle Lösungen dieser Form mit $k_z \neq 0$ sind also keine Lösungen der Dirac-Gleichung.

Im Teil B können **10 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) bis zum unten genannten Datum bitte per Mail an **antonia.schulz@ovgu.de**.