Kleine Formelsammlung Vektoranalysis

Vektorprodukte

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\
\vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\
\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\
\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \qquad \text{(Entwicklungssatz)} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}) \qquad \text{(Identität von Lagrange)} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \quad (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \quad (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\
-(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} \qquad \text{(Spartprodukt)}
\end{aligned}
$$

Gradient

Einführung des Gradienten über ein Oberflächenintegral:

$$
\operatorname{grad} \psi = \vec{\nabla} \psi = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \psi(\vec{r}) \, d\vec{f}
$$

Wichtige Identitäten (c = const., $\psi = \psi(\vec{r})$ und $\phi = \phi(\vec{r})$ Skalarfelder, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r})$ Vektorfelder):

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} c &= 0 \\
\vec{\nabla} \vec{r} &= 3 \\
\vec{\nabla}(c\psi) &= c\vec{\nabla}\psi \\
\vec{\nabla}(\psi + \phi) &= \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\phi \\
\vec{\nabla}(\psi\phi) &= \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi \\
\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\
\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{r}) &= \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \\
\vec{\nabla}\psi(r) &= \psi'(r)\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{(Zentralfeld)} \\
\vec{\nabla} f(\psi) &= f'(\psi)\vec{\nabla}\psi \\
\frac{\partial \psi}{\partial n} &= \vec{n}(\vec{\nabla}\psi) \qquad \text{(Ableitung in Richtung des Einheitsvektors } \vec{n}\text{)} \\
\psi(\vec{r} + \vec{a}) &= \psi(\vec{r}) + \vec{a}(\vec{\nabla}\psi(\vec{r})) + \ldots \qquad \text{(Taylorentwicklung)} \\
(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} &= \vec{v} \\
(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\psi\vec{r} &= \vec{v}\psi + \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\psi)
\end{aligned}
$$

Divergenz
Einführung der Divergenz über ein Oberflächenintegral:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\vec{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\vec{v}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{f}$$

Wichtige Identitäten: ($\vec{c}$ konstanter Vektor, $\psi = \psi(\vec{r})$ Skalarfeld, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r})$ Vektorfelder)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{c} &= 0\\
\vec{\nabla}(c\vec{v}) &= c\vec{\nabla}\vec{v}\\
\vec{\nabla}(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{\nabla}\vec{v}+\vec{\nabla}\vec{w}\\
\vec{\nabla}(\psi\vec{v}) &= \psi\vec{\nabla}\vec{v}+\vec{v}(\vec{\nabla}\psi)\\
\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{w}) &= \vec{w}(\vec{\nabla}\times\vec{v})-\vec{v}(\vec{\nabla}\times\vec{w})\\
\vec{\nabla}(\vec{v}\times\vec{r}) &= \vec{r}(\vec{\nabla}\times\vec{v})\\
\vec{\nabla}(\psi(r)\vec{r}) &= 3\psi(r)+r\psi'(r) \qquad \text{(Zentralfeld)}\\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) &= 0
\end{aligned}$$

Rotation
Einführung der Rotation über ein Oberflächenintegral:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\vec{v}(\vec{r})\times \mathrm{d}\vec{f}$$

Wichtige Identitäten: ($\vec{c}$ konstanter Vektor, $\psi = \psi(\vec{r})$ Skalarfeld, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r})$ Vektorfelder)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{c} &= 0\\
\vec{\nabla}\times\vec{r} &= 0\\
\vec{\nabla}\times(c\vec{v}) &= c\vec{\nabla}\times\vec{v}\\
\vec{\nabla}\times(\vec{v}+\vec{w}) &= \vec{\nabla}\times\vec{v}+\vec{\nabla}\times\vec{w}\\
\vec{\nabla}\times(\psi\vec{v}) &= \psi\vec{\nabla}\times\vec{v}+(\vec{\nabla}\psi)\times\vec{v}\\
\vec{\nabla}\times(\psi\vec{r}) &= (\vec{\nabla}\psi)\times\vec{v}\\
\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{w}) &= (\vec{w}\vec{\nabla})\vec{v}-(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{w}+\vec{v}\vec{\nabla}\vec{w}-\vec{w}\vec{\nabla}\vec{v}\\
\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{r}) &= (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{v}+2\vec{v}-\vec{r}\vec{\nabla}\vec{v}\\
\vec{\nabla}\times(\vec{c}\times\vec{r}) &= 2\vec{c}\\
\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi &= 0\\
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v})-\Delta\vec{v}
\end{aligned}$$

Laplaceoperator
Einführung des Laplaceoperators über ein Oberflächenintegral:

$$\Delta\psi = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \nabla\psi$$

Wichtige Identitäten:

$$\Delta\psi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi)$$
$$\Delta\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{v})$$

(Verallgemeinerter) Gauß'scher Satz

$$\int_V \vec{\nabla}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\psi(\vec{r})$$
$$\int_V \vec{\nabla}\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{v}(\vec{r})$$
$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f}\times\vec{v}(\vec{r})$$

(Verallgemeinerter) Stockes'scher Satz

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\times(\vec{\nabla}\psi(\vec{r})) = \oint_{\partial F} \psi(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$$
$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r})) = \oint_{\partial F} \vec{v}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Green'sche Identitäten

$$\int_V (\psi\Delta\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\,\mathrm{d}r^3 = \int_{\partial V} \psi\,\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{f}$$
$$\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\,\mathrm{d}r^3 = \int_{\partial V} (\psi\,\nabla\phi - \phi\,\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{f}$$

Vektordifferentiation in krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten
Transformation: $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$

Koordinaten-System	x	y	z
Zylinderkoordinaten	$r\cos\varphi$	$r\sin\varphi$	z
Kugelkoordinaten	$r\cos\varphi\sin\vartheta$	$r\sin\varphi\sin\vartheta$	$r\cos\vartheta$

Quadrat des Linienelementes: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (U\,\mathrm{d}u\,\vec{e}_u + V\,\mathrm{d}v\,\vec{e}_v + W\,\mathrm{d}w\,\vec{e}_w)^2$

Koordinaten-System	u	v	w	U	V	W	$\vec{e}_u$	$\vec{e}_v$	$\vec{e}_w$
Zylinderkoordinaten	r	φ	z	1	r	1	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_z$
Kugelkoordinaten	r	ϑ	φ	1	r	$r\sin\vartheta$	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\vartheta$	$\vec{e}_\varphi$

Differentialoperatoren:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\psi = \vec{\nabla}\psi &= \frac{1}{U}\frac{\partial\psi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{V}\frac{\partial\psi}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{W}\frac{\partial\psi}{\partial w}\vec{e}_w \\
\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial(A_u VW)}{\partial u} + \frac{\partial(A_v WU)}{\partial v} + \frac{\partial(A_w UV)}{\partial w}\right] \\
\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{UVW}\begin{vmatrix} U\vec{e}_u & V\vec{e}_v & W\vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ A_u U & A_v V & A_w W \end{vmatrix} \\
\Delta\psi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi &= \frac{1}{UVW}\left[\frac{\partial\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)}{\partial w}\right]
\end{aligned}$$

explizit in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

explizit in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z \\
\Delta\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

explizit in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\vartheta\, A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$