Автоматика и телемеханика, № 10, 2010

© 2010 г. Ю.Н. СОТСКОВ, д-р физ.-мат. наук,
Н.Г. ЕГОРОВА
(Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь),
Ф. ВЕРНЕР, д-р философии
(Факультет математики Университета Отто фон Герике, Магдебург, Германия)

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДАННЫМИ: МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА УСТОЙЧИВОСТИ[1]

Исследуется задача построения расписания для одного прибора при неопределенных исходных данных: длительность обслуживания требования может оказаться равной любому действительному числу из заданного отрезка. Критерий оптимальности – минимизация суммарного взвешенного времени обслуживания n требований. В качестве решения задачи с неопределенными данными рассматривается минимальное доминирующее множество перестановок требований, содержащее хотя бы одну оптимальную перестановку для каждой возможной реализации длительностей обслуживания требований. Для реализации оптимальной или близкой к оптимальной перестановки требований строится перестановка с наибольшим объемом многогранника устойчивости, который является подмножеством области устойчивости. Для поиска перестановки с наибольшим многогранником устойчивости разработан метод ветвей и границ. Если несколько перестановок имеют наибольший объем многогранника устойчивости, то среди них выбирается перестановка, удовлетворяющая одному из двух простых эвристических правил. Качество построенных перестановок (насколько они близки к фактически оптимальным перестановкам) и эффективность разработанных программ (среднее время работы процессора при решении одного примера) продемонстрированы на множестве случайно сгенерированных примеров с количеством требований, заключенным в пределах $5 \le n \le 100$.

1. Введение

Практические задачи построения оптимальных расписаний могут включать различные неопределенные параметры, и в литературе по исследованию операций представлено несколько подходов к решению таких задач. В широко распространенном стохастическом подходе [1] неопределенная длительность представляется случайной величиной с заранее известным законом распределения вероятностей. Если же нет достоверной информации для определения закона распределения вероятностей каждой случайной длительности, то необходимо использовать другие подходы [2, 3]. В частности, в робастном подходе [4–6] лицо, принимающее решение, отдает предпочтение расписанию, при котором исключаются потери при наихудшем сценарии среди всех возможных реализаций длительностей обслуживания требований. Подход, основанный на устойчивости, разработанный в [7–12], объединяет анализ устойчивости, двустадийное принятие решений и минимальное доминирующее множество расписаний, которое определяет оптимальное покрытие всех возможных сценариев в том смысле, что оно содержит хотя бы одну оптимальную перестановку для каждой

[1] Исследования первого автора проводились при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

возможной реализации длительностей обслуживания требований [9–11]. Минимальное доминирующее множество расписаний (которое может быть построено на стадии оф-лайн) позволяет принимать он-лайн решения всякий раз, когда становится доступной информация о реализации обслуживания некоторых требований [9, 10].

В этой статье рассматривается задача построения расписания для одного прибора с интервальными длительностями обслуживания n требований. Для решения этой задачи точно (или приближенно) используется понятие многогранника устойчивости аналогичного шару устойчивости [9, 12–14], который применен в постоптимальном анализе. С помощью точной формулы для определения за время $O(n \log n)$ многогранника устойчивости конкретной перестановки разработан метод ветвей и границ для определения перестановки с наибольшим объемом многогранника устойчивости. Представлены результаты экспериментов по нахождению перестановок с наибольшим объемом многогранника устойчивости, удовлетворяющих одному из двух эвристических правил.

2. Постановка задачи, обозначения, обзор результатов

Множество n требований $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$, $n \geq 2$, необходимо обслужить одним прибором. Каждому требованию $J_i \in \mathcal{J}$ сопоставлен вес $w_i > 0$. Длительность обслуживания p_i требования $J_i \in \mathcal{J}$ может оказаться равной любому действительному числу, заключенному между нижней границей $p_i^L > 0$ и верхней границей $p_i^U \geq p_i^L$, которые известны до начала составления расписания. Длительность обслуживания p_i может оставаться неизвестной вплоть до момента завершения обслуживания требования J_i (такое условие имеет место для многих задач оперативно-календарного планирования).

Пусть T обозначает множество всех векторов $p = (p_1, \dots, p_n)$ возможных длительностей обслуживания требований. Множество T – это замкнутый прямоугольный многогранник в пространстве R_+^n неотрицательных n-мерных действительных векторов. Он может быть представлен как декартово произведение n отрезков $[p_i^L, p_i^U]$, $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$(1) \qquad T = \left\{p \mid p \in R_+^n,\ p_i^L \leq p_i \leq p_i^U,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}\right\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U].$$

Вектор $p \in T$ возможных длительностей обслуживания требований будем называть сценарием.

Пусть $S = \{\pi_1, \dots, \pi_{n!}\}$ – множество всех перестановок $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n})$ требований $\mathcal{J} = \{J_{k_1}, \dots, J_{k_n}\}$. Если перестановки π_k требований множества $\mathcal{J}$ и сценарий $p \in T$ зафиксированы, то $C_i = C_i(\pi_k, p)$ – момент завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ в активном расписании, определяемом перестановкой π_k. Расписание называется активным, если ни одно требование $J_i \in \mathcal{J}$ нельзя начать обслуживать раньше без задержки обслуживания другого требования из множества $\mathcal{J}$ или без изменения порядка обслуживания требований $\mathcal{J}$. В качестве критерия оптимальности будем рассматривать минимизацию суммарного взвешенного времени обслуживания всех требований $\sum w_i C_i$:

$$\sum_{J_i \in \mathcal{J}} w_i C_i(\pi_t, p) = \min_{\pi_k \in S} \left\{ \sum_{J_i \in \mathcal{J}} w_i C_i(\pi_k, p) \right\}.$$

Здесь перестановка $\pi_t = (J_{t_1}, \dots, J_{t_n}) \in S$ является оптимальной. Используя трехпозиционную форму обозначения $\alpha|\beta|\gamma$, введенную в [15], сформулированную задачу будем обозначать как $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$.

Поскольку сценарий $p \in T$ может оставаться неизвестным вплоть до момента завершения обслуживания всех требований $\mathcal{J}$, момент C_i завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$, вообще говоря, нельзя вычислить на стадии построения расписания. Поэтому задача $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ математически некорректна в том смысле, что значения целевой функции $\gamma = \sum\limits_{J_i \in \mathcal{J}} w_i C_i(\pi_k, p)$ для различных перестановок $\pi_k \in S$ не определены до завершения обслуживания требований множества $\mathcal{J}$.

Если же зафиксировать сценарий $p \in T$ к моменту построения расписания (т.е. если имеют место равенства $p_i^L = p_i^U = p_i$ и отрезок $[p_i^L, p_i^U]$ вырождается в одну точку $p_i = [p_i, p_i]$ для каждого требования J_i, $i \in \{1, \dots, n\}$), то задача $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ превращается в задачу $1||\sum w_i C_i$ с детерминированными длительностями обслуживания требований. Полученная таким образом задача математически корректна и может быть решена за время $O(n \log n)$, как было установлено Смитом [16].

Задачу $\alpha|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\gamma$ с целевой функцией $\gamma = f(C_1, \dots, C_n)$ будем называть неопределенной в отличие от задачи $\alpha||\gamma$, которую будем называть детерминированной. Если для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ правило оптимального упорядочения требований было известно уже в 1956 г. [16], то ее неопределенный аналог $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ поныне привлекает внимание исследователей, которые продолжают развивать различные методы корректировки и решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ (см. [4–7, 11, 17, 18]). Далее приводится краткий обзор результатов по решению неопределенных задач теории расписаний.

2.1. Робастный метод

Для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\gamma$, как правило, не существует перестановки требований $\mathcal{J}$, которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества T. Поэтому часто вводят дополнительный критерий для решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\gamma$ с неопределенными исходными данными. Например, в [4, 5] было введено понятие робастного расписания, при котором минимизируется отклонение от оптимума в наихудшем из возможных случае. При использовании робастного метода множество T либо включает континуум сценариев (T – декартово произведение отрезков, определенное в (1)), либо множество T содержит конечное число сценариев:

$$T = \left\{ p^j = (p_1^j, \dots, p_n^j) \mid p^j \in R_+^n, \quad j \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Для сценария $p \in T$ пусть γ_p^t обозначает оптимальное значение целевой функции $\gamma = f(C_1, \dots, C_n)$, которое получено для задачи $1||\gamma$ с фиксированным сценарием p. Перестановка $\pi_t \in S$ является оптимальной, если

$$f(C_1(\pi_t, p), \dots, C_n(\pi_t, p)) = \gamma_p^t = \min_{\pi_k \in S} \gamma_p^k = \min_{\pi_k \in S} f(C_1(\pi_k, p), \dots, C_n(\pi_k, p)).$$

Для каждой перестановки $\pi_k \in S$ и каждого сценария $p \in T$, разность $\gamma_p^k - \gamma_p^t = r(\pi_k, p)$ называется величиной потерь перестановки π_k при значении целевой функции, равном γ_p^k для сценария p. Для перестановки $\pi_k \in S$ величина

$$Z(\pi_k) = \max\{r(\pi_k, p) \mid p \in T\}$$

называется абсолютной величиной потерь в наихудшем случае. Относительная величина потерь в наихудшем случае определяется следующим образом:

$$Z'(\pi_k) = \max\left\{ \frac{r(\pi_k, p)}{\gamma_p^t} \mid p \in T \right\}$$

при условии, что $\gamma_p^t \neq 0$. В [4, 6] исследовалась задача $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum C_i$ минимизации суммарного времени обслуживания требований (т.е. веса были одинаковы, $w_i = 1$, для всех требований $J_i \in \mathcal{J}$). Для конкретного сценария $p^j \in T$ возникает детерминированная задача $1||\sum C_i$, которая решается согласно следующему правилу кратчайшей операции (SPT) [16]: обслуживать требования множества $\mathcal{J}$ в порядке неубывания длительностей обслуживания $p_i^j,\ J_i \in \mathcal{J}$. Если детерминированная задача $1||\sum C_i$ решается за время $O(n \log n)$, то задача нахождения перестановки $\pi_t \in S$, минимизирующей абсолютную величину $Z(\pi_t)$ потерь или относительную величину потерь $Z'(\pi_k)$ в наихудшем случае для неопределенной задачи $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum C_i$, является бинарно NP-трудной даже при двух возможных сценариях (доказательства содержатся в [4] и [6] соответственно). Известно только несколько специальных частных случаев, в которых минимизация величины потерь в наихудшем случае для задачи $\alpha|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$ может быть реализована за полиномиальное время.

В [17] был предложен 2-приближенный алгоритм минимизации величины потерь в наихудшем случае для задачи $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum C_i$. В [4, 6, 18], были предложены и протестированы точный и приближенный алгоритмы минимизации величины потерь в наихудшем случае для той же задачи.

2.2. Метод, основанный на устойчивости

Исследуем применение метода, основанного на устойчивости [7–9], для решения задачи $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$, рассматривая множество T как континуум возможных сценариев (1). Этот метод объединяет анализ устойчивости [9, 13, 14, 19–21], двустадийное принятие решений (стадию планирования в режиме оф-лайн и стадию составления расписания в режиме он-лайн) [9, 10, 22] и решение неопределенной задачи в виде минимального доминирующего множества активных расписаний [7–9, 11, 12] (минимального доминирующего множества перестановок в случае задачи $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$). В качестве решения неопределенной задачи теории расписаний целесообразно использовать минимальное доминирующее множество перестановок (активных расписаний), которое определяется следующим образом.

Определение 1. Множество перестановок (активных расписаний) $S(T) \subseteq S$ называется минимальным доминирующим множеством для задачи $\alpha|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$, если

(a) для любого фиксированного сценария $p \in T$ множество $S(T)$ содержит хотя бы одну перестановку (одно активное расписание), которое является оптимальным для детерминированной задачи $\alpha||\gamma$ со сценарием p,

(b) свойством (a) не обладает ни одно собственное подмножество множества $S(T)$.

В силу условия (b) множество $S(T)$ является минимальным доминирующим множеством относительно включения. Множество $S(T)$ исследовалось в [7–9, 23–25] для критерия быстродействия и в [9, 12, 21, 24, 26] для критерия минимизации суммарного времени обслуживания требований. Статья [26] посвящена минимизации суммарного времени обслуживания требований в системе поточного типа с двумя приборами $F2|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum C_i$. Геометрический алгоритм был предложен для решения задачи $Fm|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, n = 2|\sum C_i$ поточного типа с m приборами и двумя требованиями. Для неопределенной задачи поточного типа с двумя или тремя приборами были доказаны достаточные условия, при выполнении которых перестановка требований минимизирует суммарное время их обслуживания. В [24] рассматривается критерий $C_{\max}$ и критерий $\sum C_i$ в предположении, что длительности операций фиксированы, а о длительностях переналадок приборов известно, что они принадлежат заданным интервалам. Были установлены отношения доминирования для неопределенной задачи поточного типа с двумя приборами. В [23] для задачи поточного типа $F2|p_i^L \le p_i \le p_i^U|C_{\max}$ с двумя приборами были установлены достаточные условия, при выполнении которых перестановка двух требований минимизирует $C_{\max}$. Для задачи $Jm|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ с m приборами в [12] предложено и протестировано несколько точных и приближенных алгоритмов на основе моделей в виде смешанных (дизъюнктивных) графов.

Перед тем как представить эвристические алгоритмы для решения задачи $1|p_i^L \le$ $\le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$, напомним некоторые известные результаты для этой неопределенной задачи и ее детерминированного аналога. В [16] доказано, что задача $1||\sum w_iC_i$ решается за $O(n \log n)$ операций на основе следующего достаточного условия оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$:

$$\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}} \ge \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}} \ge \ldots \ge \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}}, \tag{2}$$

в котором $p_{k_i} > 0$ для каждого требования $J_{k_i} \in \mathcal{J}$. Итак, задача $1||\sum w_iC_i$ может быть решена на основе правила наименьшей взвешенной длительности операции (WSPT): требования необходимо обслуживать в порядке неубывания отношений веса к длительности $\frac{w_{k_i}}{p_{k_i}}$. Выполнение неравенств (2) является и необходимым условием оптимальности перестановки $\pi_k \in S$ (см, например, [27]).

Т е о р е м а 1 [16, 27]. *Перестановка* $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ *является оптимальной для задачи* $1||\sum w_iC_i$ *тогда и только тогда, когда выполняются неравенства* (2).

Минимальное доминирующее множество $S(T)$ может быть определено для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ на основе следующего отношения доминирования на множестве требований $\mathcal{J}$.

О п р е д е л е н и е 2. *Требование* J_u *доминирует требование* J_v *относительно* T *(обозначение* $J_u \mapsto J_v$*), если существует минимальное доминирующее множество* $S(T)$ *для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *такое, что требование* J_u *предшествует требованию* J_v *в каждой перестановке из множества* $S(T)$.

Из определения 2 следует, что минимальное доминирующее множество, построенное для детерминированной задачи $1||\sum w_iC_i$ со сценарием $p \in T$, является одноэлементным множеством $S(T) = \{\pi_k\}$, где $T = \{p\}$. Иными словами, для детерминированной задачи $1||\sum w_iC_i$ выполняются отношения $J_{k_1} \mapsto J_{k_2} \mapsto \ldots \mapsto J_{k_{n-1}} \mapsto J_{k_n}$ относительно $T = \{p\}$. Следующее утверждение было доказано в [11].

Т е о р е м а 2 [11]. *Для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *требование* J_u *доминирует требование* J_v *относительно* T *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{w_u}{p_u^U} \ge \frac{w_v}{p_v^L}. \tag{3}$$

Мощность $|S(T)|$ минимального доминирующего множества $S(T)$ можно рассматривать как меру неопределенности задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$. В случае наименьшего значения $|S(T)| = 1$ минимальное доминирующее множество для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ является одноэлементным множеством $\{\pi_k\} = S(T)$, которое является решением детерминированного аналога $1||\sum w_iC_i$ со сценарием $p \in T$. Характеризация этого случая задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ дана в [11].

Т е о р е м а 3 [11]. *Для существования одноэлементного доминирующего множества* $S(T) = \{\pi_k\} = \{(J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})\}$ *для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:*

$$\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}^U} \ge \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^L}; \quad \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^U} \ge \frac{w_{k_3}}{p_{k_3}^L}; \quad \ldots \quad \frac{w_{k_{n-1}}}{p_{k_{n-1}}^U} \ge \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}^L}. \tag{4}$$

В наиболее неопределенном случае задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ имеет место равенство $|S(T)| = n!$. Этот случай также охарактеризован в [11].

Т е о р е м а 4 [11]. *Пусть* $p_i^L < p_i^U$, $J_i \in \mathcal{J}$. *Для существования минимального доминирующего множества* $S(T)$ *максимальной мощности* $|S(T)| = n!$ *для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:*

$$\max\left\{\frac{w_i}{p_i^U} \mid J_i \in \mathcal{J}\right\} < \min\left\{\frac{w_i}{p_i^L} \mid J_i \in \mathcal{J}\right\}. \tag{5}$$

В [28] был исследован случай единственности минимального доминирующего множества $S(T)$. Индивидуальную детерминированную задачу (пример) массовой задачи $1||\sum w_iC_i$ будем обозначать через $1|p|\sum w_iC_i$, где p – фиксированный сценарий. Будем использовать обозначения $a = \min\left\{\frac{w_i}{p_i^U} \mid J_i \in \mathcal{J}\right\}$ и $b = \max\left\{\frac{w_i}{p_i^L} \mid J_i \in \mathcal{J}\right\}$. В критерии единственности минимального доминирующего множества $S(T)$ используются следующие подмножества $\mathcal{J}_r$, $r \in [a,b]$, требований множества $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}_r = \left\{J_i \in \mathcal{J} \mid r = \frac{w_i}{p_i^U} = \frac{w_i}{p_i^L}\right\}. \tag{6}$$

Т е о р е м а 5 [28]. *Для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *минимальное доминирующее множество* $S(T)$ *является единственным тогда и только тогда, когда не существует* $r \in [a,b]$ *такого, что* $|\mathcal{J}_r| \ge 2$.

Т е о р е м а 6 [28]. *Пусть* $S(T)$ *– минимальное доминирующее множество для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$. *Для перестановки* $\pi_k \in S(T)$ *существует сценарий* $p \in T$ *такой, что* π_k *– единственная оптимальная перестановка для примера* $1|p|\sum w_iC_i$ *тогда и только тогда, когда не существует* $r \in [a,b]$ *такого, что* $|\mathcal{J}_r| \ge 2$.

Теорема 4 обобщена в [28] следующим образом.

Т е о р е м а 7 [28]. *Пусть не существует числа* $r \in [a,b]$ *такого, что* $|\mathcal{J}_r| \ge 2$. *Для существования минимального доминирующего множества* $S(T)$ *с максимальной мощностью* $|S(T)| = n!$ *для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ *необходимо и достаточно выполнение неравенства* (5).

Поскольку мощность минимального доминирующего множества для различных задач может принимать значения из множества натуральных чисел от 1 (теорема 3) до $n!$ (теоремы 4 и 7), то за полиномиальное время невозможно построить все перестановки множества $S(T)$. Однако на основе теоремы 2 можно получить компактное представление минимального доминирующего множества $S(T)$ для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ в виде орграфа $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ с множеством вершин $\mathcal{J}$ и множеством дуг $\mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить условие (3) для каждой пары требований J_u и J_v из множества $\mathcal{J}$ и построить орграф $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ следующего отношения доминирования на множестве $\mathcal{J}$: дуга (J_u, J_v) принадлежит множеству $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $J_u \mapsto J_v$. Построение орграфа $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ требует $O(n^2)$ операций.

Т е о р е м а 8 [28]. *Орграф* $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$, *построенный для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$, *определяет отношение строгого порядка на множестве* $\mathcal{J}$ *тогда и только тогда, когда не существует* $r \in [a,b]$ *такого, что* $|\mathcal{J}_r| \ge 2$.

Если существует $r \in [a,b]$ с неравенством $|\mathcal{J}_r| \ge 2$, то в силу теоремы 5 существует, по крайней мере, два минимальных доминирующих множества для задачи

$1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$. Все минимальные доминирующие множества для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ были подсчитаны в [28].

Т е о р е м а 9 [28]. *Пусть неравенство $|\mathcal{J}_{r_q}| \ge 2$ выполняется для каждого $r_q \in \{r_1, \ldots, r_m\}$, где число $m \ge 1$ максимальное и $r_q \in [a, b]$. Тогда число k всех минимальных доминирующих множеств для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ равно $\prod_{q=1}^m |\mathcal{J}_{r_q}|!$. Если $m = 0$, то $k = 1$.*

Из теорем 5–9 следует, что при существовании множества $\mathcal{J}_{r_q}$ с $|\mathcal{J}_{r_q}| \ge 2$, $r_q \in \{r_1, \ldots, r_m\}$, минимальное доминирующее множество не обладает полезными свойствами. Действительно, если существует хотя бы одно множество $\mathcal{J}_{r_q}$, не являющееся одноэлементным, то бинарное отношение $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ не является строгим порядком (теорема 8); минимальное доминирующее множество не является единственным (теорема 5); число минимальных доминирующих множеств для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ может быть большим (теорема 9). Далее покажем, как преодолеть трудности, связанные с наличием множеств $\mathcal{J}_{r_q}$, $|\mathcal{J}_{r_q}| \ge 2$, и как использовать эти множества при решении задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ (когда не вводится дополнительный критерий в связи с неопределенностью задачи). Размерность n задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ будет уменьшена на величину $|\mathcal{J}_{r_q}| - 1$ для каждого множества $\mathcal{J}_{r_q}$ в результате отождествления требований $\mathcal{J}_{r_q}$.

В силу теоремы 1 в любой оптимальной перестановке $\pi_l \in S$ для примера $1|p|\sum w_iC_i$ все требования множества $\mathcal{J}_{r_q} \subseteq \mathcal{J}$ должны располагаться непосредственно одно за другим: $\pi_l = \big(\ldots, \pi(\mathcal{J}_{r_q}), \ldots\big)$, здесь $\pi(\mathcal{J}_{r_q})$ – перестановка требований множества $\mathcal{J}_{r_q}$. Кроме того, порядок требований $\Big\{J_{q(1)}, J_{q(2)}, \ldots, J_{q(|\mathcal{J}_{r_q}|)}\Big\} = \mathcal{J}_{r_q}$ в перестановке $\pi(\mathcal{J}_{r_q})$ не оказывает влияния на значение целевой функции $\gamma = \sum_{i=1}^n w_iC_i$, вычисленной для любой перестановки $\pi_k \in S$ вида $\pi_k = (\ldots, \pi(\mathcal{J}_{r_q}), \ldots)$ (поскольку длительность обслуживания каждого требования $J_{q(v)} \in \mathcal{J}_{r_q}$ фиксирована и отношение веса к длительности одно и то же для всех требований множества $\mathcal{J}_{r_q}$). Поэтому при поиске оптимальной перестановки для примера $1|p|\sum w_iC_i$, полученного из неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ в результате фиксации сценария $p \in T$, достаточно рассматривать все требования $\Big\{J_{q(1)}, J_{q(2)}, \ldots, J_{q(|\mathcal{J}_{r_q}|)}\Big\} = \mathcal{J}_{r_q}$ как одно требование с числовыми параметрами (вес и длительность), равными числовым параметрам любого из требований множества $\mathcal{J}_{r_q}$. Выбрав по одному (любому) требованию из каждого множества $\mathcal{J}_{r_q}$, $r_q \in \{r_1, \ldots, r_m\}$, $|\mathcal{J}_{r_q}| \ge 2$, исходный пример неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ превратим в эквивалентный пример (обозначим его как $1^*|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$) с меньшей мощностью множества требований (обозначим полученное множество требований через $\mathcal{J}^*$):

$$|\mathcal{J}^*| = |\mathcal{J}| - \sum_{q=1}^m (|\mathcal{J}_{r_q}| - 1) = n + m - \sum_{q=1}^m |\mathcal{J}_{r_q}|.$$

В следующем утверждении $1^*|p|\sum w_iC_i$ обозначает детерминированный пример, полученный из неопределенного примера $1^*|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ в результате фиксации сценария $p \in T$.

Т е о р е м а 10 [28]. *Пример $1^*|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ эквивалентен исходному примеру неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ в том смысле, что для любого фиксированного сценария $p \in T$ оптимальная перестановка π_k примера $1^*|p|\sum w_iC_i$ получается из соответствующей оптимальной перестановки π_t де-*

терминированного примера $1|p|\sum w_iC_i$ исходной неопределенной задачи в результате удаления из перестановки π_t требований множества $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}^*$.

Помимо меньшей размерности ($|\mathcal{J}^*| < |\mathcal{J}|$) эквивалентный пример $1^*|p_i^L \leq p_i \leq \leq p_i^U|\sum w_iC_i$ имеет единственное минимальное доминирующее множество $S(T)$ (в силу теоремы 5). Следовательно, $S(T)$ является минимальным доминирующим множеством как по включению, так и по мощности. Следующее полезное свойство задачи $1^*|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_iC_i$ состоит в том, что отношение $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ является отношением строгого порядка на множестве $\mathcal{J}$ (в силу теоремы 8) и соответствующий орграф $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ не имеет петель и контуров. В силу теоремы 6 для любой перестановки $\pi_k \in S(T)$ существует сценарий $p \in T$ такой, что π_k – единственная оптимальная перестановка для примера $1|p|\sum w_iC_i$.

Вместо орграфа $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ можно использовать орграф редукции $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A}^0)$, который получается из $(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ в результате удаления транзитивных дуг $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^0$.

2.3. Свойства многогранника и области устойчивости

В [28] введено понятие многогранника устойчивости перестановки $\pi_k \in S$, который является подмножеством области устойчивости [9, 12, 13, 20] и аналогичен шару устойчивости, который исследовался в [9, 12–14, 20] при постоптимальном анализе оптимальной перестановки, построенной для детерминированной задачи.

Определение 3. *Максимальный замкнутый прямоугольный многогранник $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \times_{i=1}^{n}[l_i, u_i] \subseteq T$ называется многогранником устойчивости перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ относительно T, если для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ перестановка π_k остается оптимальной для примера $1|p'|\sum w_iC_i$ с любым сценарием $p' = (p'_1, \ldots, p'_n) \in \left\{\times_{j=1, j\neq i}^{n}[p_{k_j}^L, p_{k_j}^U]\right\} \times [l_{k_i}, u_{k_i}]$. Если не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k оптимальна для примера $1|p|\sum w_iC_i$, то $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \emptyset$.*

В определении 3 максимальность многогранника $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ означает, что для каждой позиции $i \in \{1, \ldots, n\}$ перестановки π_k нижняя граница l_{k_i} (верхняя граница u_{k_i}) вариации длительности p_{k_i} требования J_{k_i}, расположенного i-м по порядку в перестановке π_k, сохраняющей оптимальность перестановки π_k, должна быть наименьшей (наибольшей) при условии, что длительности остальных требований J_{k_j}, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, могут изменяться совместно и независимо в пределах заданных отрезков $[p_{k_j}^L, p_{k_j}^U]$. Назовем размерностью многогранника устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ мощность $|N_k|$ множества $\{p_{k_i} \mid k_i \in N_k\}$ длительностей, которые имеют непустые области вариации, сохраняющие оптимальность перестановки π_k. Мощность $|N_k|$ множества N_k – важная характеристика многогранника устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$: она определяет наибольшее число длительностей p', которые можно модифицировать в сценарии p без нарушения оптимальности перестановки π_k. Заметим, что остальные длительности $\{p'_{k_j} \mid k_j \in N \setminus N_k\}$ должны оставаться такими же, как и в сценарии p, $p'_{k_j} = p_{k_j}$, чтобы перестановка π_k оставалась оптимальной.

В [12, 13, 20] исследовалась область устойчивости активного расписания для задач теории расписаний с критерием минимизации среднего и максимального времени обслуживания требований соответственно. Если использовать введенные обозначения для задачи $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_iC_i$, то область устойчивости $\mathcal{K}(\pi_k, T)$ перестановки $\pi_k \in S$ относительно T определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}(\pi_k, T) = \left\{p \mid p \in T,\ \sum_{J_i \in \mathcal{J}} w_iC_i(\pi_k, p) = \min_{\pi_l \in S}\left\{\sum_{J_i \in \mathcal{J}} w_iC_i(\pi_l, p)\right\}\right\}. \tag{7}$$

Из определения 3 многогранника устойчивости и определения (7) области устойчивости получаем включение

$$\mathcal{SB}(\pi_k, T) \subseteq \mathcal{K}(\pi_k, T).$$

В эвристических алгоритмах для решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ будем использовать многогранник устойчивости, несмотря на то, что $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ часто является собственным подмножеством множества $\mathcal{K}(\pi_k, T)$. Этот выбор определяется простотой многогранника устойчивости, позволяющей за полиномиальное время определять многогранник $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k \in S(T)$.

В [28] были установлены следующие свойства многогранника и области устойчивости.

Теорема 11 [28]. *Многогранник устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ (область устойчивости $\mathcal{K}(\pi_k, T)$) является пустым (пустой) тогда и только тогда, когда не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для примера $1|p|\sum w_i C_i$.*

Теорема 12 [28]. *Существует сценарий $p \in T$ такой, что перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ является оптимальной для примера $1|p|\sum w_i C_i$ тогда и только тогда, когда не существует требования J_{k_i}, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, такого что неравенство*

$$\frac{w_{k_i}}{p_{k_i}^L} < \frac{w_{k_j}}{p_{k_j}^U} \tag{8}$$

выполняется хотя бы для одного требования J_{k_j}, где $j \in \{i+1, i+2, \ldots, n\}$.

Теорема 13 [28]. *Многогранник устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ (область устойчивости $\mathcal{K}(\pi_k, T)$) является пустым (пустой) тогда и только тогда, когда существует требование J_{k_i}, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ такое, что неравенство* (8) *выполняется хотя бы для одного требования J_{k_j}, где $j \in \{i+1, i+2, \ldots, n\}$.*

Из определения 3 и определения (7) следует теорема 14.

Теорема 14 [28]. *Если существует точно один сценарий $p \in T$ такой, что перестановка $\pi_k \in S$ является оптимальной для примера $1|p|\sum w_i C_i$, то $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \{p\} = \mathcal{K}(\pi_k, T)$.*

Теорема 15 характеризует другой крайний случай для многогранника и области устойчивости.

Теорема 15 [28]. *$\mathcal{SB}(\pi_k, T) = T = \mathcal{K}(\pi_k, T)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства* (4).

Как следует из определения 1, при поиске оптимальной перестановки для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ можно ограничиться рассмотрением минимального доминирующего множества $S(T)$. Для каждой перестановки множества $S(T)$ как область устойчивости, так и многогранник устойчивости не являются пустыми, т.е. имеет место следующее утверждение.

Теорема 16 [28]. *Если $\pi_k \in S(T)$, то $\mathcal{SB}(\pi_k, T) \neq \emptyset$ и $\mathcal{K}(\pi_k, T) \neq \emptyset$.*

В следующем разделе будет представлен $O(n \log n)$-алгоритм STABOX для вычисления многогранника устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_{i-1}}, J_{k_i}, J_{k_{i+1}}, \ldots, J_{k_n}) \in S$. В разделе 3 будет показано, как можно использовать этот алгоритм для приближенного решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$.

2.4. Полиномиальный алгоритм для вычисления многогранника устойчивости

В силу аддитивности целевой функции $\gamma = \sum w_i C_i$ для нахождения многогранника $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ достаточно вычислить максимальный диапазон допустимых вариаций каждой длительности p_{k_i}, $i \in \{1, \dots, n\}$, при которых сохраняется оптимальность перестановки π_k. "*Возможная вариация*" $[l_{k_i}, u_{k_i}]$ (соответственно, $[L_{k_i}, U_{k_i}]$) длительности p_{k_i} (отношения веса к длительности требования J_{k_i}) означает следующее. Если π_k – оптимальная перестановка для примера $1|p|\sum w_i C_i$, где $p = (p_1, \dots, p_n) \in T$, то перестановка π_k должна оставаться оптимальной для любого примера $1|p'|\sum w_i C_i$, где $p' = (p'_1, \dots, p'_n) \in T$ и $p'_t = p_t$ для каждого $t \neq k_i$ и $p_{k_i} \in [l_{k_i}, u_{k_i}]$ $\left(\text{соответственно, } \frac{w_{k_i}}{p_{k_i}} \in [L_{k_i}, U_{k_i}]\right)$. Нетрудно показать, что нижняя граница $d^-_{k_i}$ максимально *возможной вариации* отношения веса к длительности определяется следующим образом:

$$d^-_{k_i} = \max\left\{\frac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}, \quad \max_{i<j\le n}\left\{\frac{w_{k_j}}{p^L_{k_j}}\right\}\right\}, \tag{9}$$

а верхняя граница $d^+_{k_i}$ - следующим образом:

$$d^+_{k_i} = \min\left\{\frac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}}, \quad \min_{1\le j<i}\left\{\frac{w_{k_j}}{p^U_{k_j}}\right\}\right\}. \tag{10}$$

В [28] доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 17 [28]. *Если не существует требования J_{k_i}, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n}) \in S$ такого, что неравенство* (8) *выполняется хоты бы для одного требования J_{k_j}, где $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$, то*

$$\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \times_{d^-_i \le d^+_i}\left[\frac{w_{k_i}}{d^+_{k_i}}, \frac{w_{k_i}}{d^-_{k_i}}\right] \times \left\{\times_{d^-_j > d^+_j}[p_{k_j}, p_{k_j}]\right\}. \tag{11}$$

В противном случае $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \emptyset$.

Если $d^-_j > d^+_j$, то нет *допустимой вариации* отношения веса к длительности для требования J_{k_j}. Размерность $|N_k|$ многогранника устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ равна количеству требований $J_{k_i} \in \mathcal{J}$, для которых выполняется противоположное неравенство $d^-_i \le d^+_i$. Максимально *возможная вариация* отношения веса к длительности $[L_{k_i}, U_{k_i}]$ для такого требования J_{k_i} не пуста: $[L_{k_i}, U_{k_i}] \neq \emptyset$.

С л е д с т в и е 1 [28]. *Если $\mathcal{SB}(\pi_k, T) \neq \emptyset$ для задачи $1|p^L_i \le p_i \le p^U_i|\sum w_i C_i$ с множеством сценариев T, то одноэлементное множество $\{\pi_k\}$ является минимальным доминирующим множеством для задачи $1|p^L_i \le p_i \le p^U_i|\sum w_i C_i$ с множеством сценариев $T^* = \mathcal{SB}(\pi_k, T)$.*

Алгоритм STABOX трудоемкости $O(n \log n)$ основан на теореме 17.

Алгоритм STABOX [28]

Вход: Отрезки $[p^L_i, p^U_i]$, веса w_i, $J_i \in \mathcal{J}$; перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n}) \in S$.

Выход: Многогранник устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$.

Ш а г 1: Построить список L дробей $\frac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}}$, $i = 1, \dots, n$, расположенных в порядке невозрастания;
найти позицию r_i элемента $\frac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}}$ в списке L, пусть $L_{r_i} = \frac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}}$.

Ш а г 2: Построить список U дробей $\frac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$, $i = 1, \dots, n$, расположенных в порядке неубывания;

найти позицию m_i элемента $\dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$ в списке U, пусть $U_{m_i} = \dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$.

Шаг 3: Построить список U^0 дробей $\dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$, $i = 1, \dots, n$, расположенных в порядке невозрастания;
найти позицию t_i элемента $\dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$ в списке U^0, пусть $U^0_{t_i} = \dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}}$.

Шаг 4: **FOR** $i = 1$ до n **DO**
$U^0 := U^0 \setminus \{U^0_{t_i}\}$; проверить неравенство $\dfrac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}} < U^0_1$,
где U^0_1 – первый (т.е. максимальный) элемент в списке U^0;
IF $\dfrac{w_{k_i}}{p^L_{k_i}} < U^0_1$ **THEN** $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = \emptyset$ **STOP.**
END FOR

Шаг 5: **FOR** $i = 1$ до $n - 1$ **DO**
$L := L \setminus \{L_{r_i}\}$; вычислить $d^-_{k_i} = \max\left\{\dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}},\ L_1\right\}$,
где L_1 – первый (т.е. максимальный) элемент в списке L.
END FOR

Шаг 6: **FOR** $i = n$ до 2 **DO**
$U := U \setminus \{U_{m_i}\}$; вычислить $d^+_{k_i} = \max\left\{\dfrac{w_{k_i}}{p^U_{k_i}},\ U_1\right\}$,
где U_1 – первый (минимальный) элемент в списке U.
END FOR

Шаг 7: $d^-_{k_n} := \dfrac{w_{k_n}}{p^U_{k_n}}$; $d^+_{k_1} := \dfrac{w_{k_1}}{p^L_{k_1}}$.

Шаг 8: **FOR** $J_i \in \mathcal{J}$ **DO**
IF $d^+_{k_i} < d^-_{k_i}$ **THEN** длительность p_{k_i} должна быть фиксированной в $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$
ELSE $\left[\dfrac{w_{k_i}}{d^+_{k_i}}, \dfrac{w_{k_i}}{d^-_{k_i}}\right]$ – максимальный отрезок
допустимых вариаций p_{k_i}.
END FOR

Шаг 9: $\mathcal{SB}(\pi_k, T) := \times_{d^-_i \le d^+_i} \left[\dfrac{w_{k_i}}{d^+_{k_i}}, \dfrac{w_{k_i}}{d^-_{k_i}}\right] \times \left\{\times_{d^-_j > d^+_j} [p_{k_j}, p_{k_j}]\right\}$ **STOP.**

Формула (11) справедлива для любой перестановки $\pi_k \in S$ с непустым многогранником устойчивости, например, для каждой перестановки $S(T)$, поскольку имеет место следующее утверждение.

Теорема 18 [28]. *Если $\pi_k \in S(T)$, то $\mathcal{SB}(\pi_k, T) \ne \emptyset$ и $\mathcal{K}(\pi_k, T) \ne \emptyset$.*

В разделе 3 показано, как можно решать задачу $1|p^L_i \le p_i \le p^U_i|\sum w_i C_i$ приближенно, используя минимальное доминирующее множество $S(T)$ и перестановку $\pi_k \in \in S(T)$ с многогранником устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$, имеющим наибольший относительный объем. Перестановка, многогранник устойчивости которой имеет наибольший относительный объем, представляет наибольший интерес среди перестановок минимального доминирующего множества при решении задачи $1|p^L_i \le p_i \le \le p^U_i|\sum w_i C_i$.

3. Перестановка с наибольшим многогранником устойчивости

На основе приведенных результатов авторы разработали метод ветвей и границ для приближенного решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$. Перестановка с большим объемом многогранника устойчивости кажется более перспективной, чем перестановка с меньшим объемом многогранника устойчивости. Для простоты представление алгоритма будет основано на следующем примере.

3.1. Пример

Таблица 1. Исходные данные для примера

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	p_i^L	p_i^U	w_i	$\frac{w_i}{p_i^L}$	$\frac{w_i}{p_i^U}$	d_i^-	d_i^+	$\frac{w_i}{d_i^+}$	$\frac{w_i}{d_i^-}$
1	4	5	400	100	80	90	100	4	$4\frac{4}{9}$
2	6	9	540	90	60	60	80	$6\frac{3}{4}$	9
3	4	10	200	50	20	40	50	4	5
4	6	6	240	40	40	40	40	6	6
5	3	4	120	40	30	40	20	–	–
6	4	16	160	40	10	10	20	8	16

Исходные данные для примера задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ представлены в столбцах 1–4 табл. 1. Для каждой пары требований $J_u \in \mathcal{J}^*$ и $J_v \in \mathcal{J}^*$ проверяем условие (3):

$$\frac{w_1}{p_1^U} = 80 \ge 50 = \frac{w_3}{p_3^L}; \quad \frac{w_1}{p_1^U} = 80 \ge 40 = \frac{w_4}{p_4^L}; \quad \frac{w_2}{p_2^U} = 60 \ge 50 = \frac{w_3}{p_3^L};$$
$$\frac{w_2}{p_2^U} = 60 \ge 40 = \frac{w_4}{p_4^L}; \quad \frac{w_4}{p_4^U} = 40 \ge 40 = \frac{w_5}{p_5^L}; \quad \frac{w_4}{p_4^U} = 40 \ge 40 = \frac{w_6}{p_6^L}.$$

Условие (3) выполняется для следующих пар упорядоченных требований: $\{J_1, J_3\}$, $\{J_1, J_4\}$, $\{J_2, J_3\}$, $\{J_2, J_4\}$, $\{J_4, J_5\}$, $\{J_4, J_6\}$. В силу теоремы 2 выполняются бинарные отношения $J_1 \mapsto J_3$, $J_1 \mapsto J_4$, $J_2 \mapsto J_3$, $J_2 \mapsto J_4$, $J_4 \mapsto J_5$, $J_4 \mapsto J_6$. Минимальное доминирующее множество $S(T)$ определяется орграфом $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ (редукция этого орграфа представлена на рис. 1). В силу теоремы 5 минимальное доминирующее множество определено однозначно для этого примера.

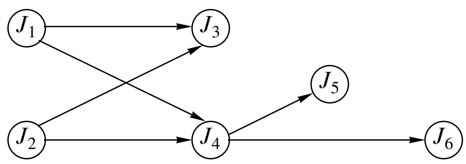

Рис. 1. Редукция орграфа $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$, определяющего минимальное доминирующее множество $S(T)$.

3.2. Метод ветвей и границ

Для поиска перестановки с наибольшим относительным объемом области устойчивости предлагается разветвляющийся алгоритм, назовем его MAXSTABOX. Обо-

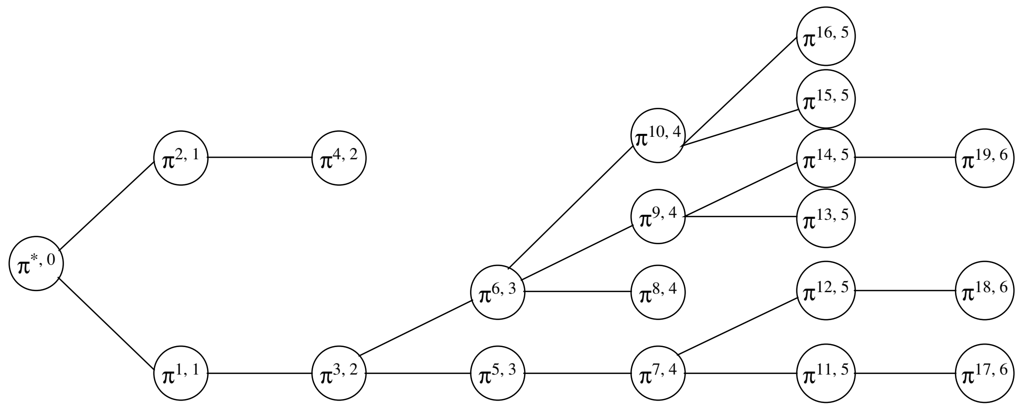

Рис. 2. Дерево решений $\mathcal{T} = (V, E)$ для примера.

значим через $\mathcal{T} = (V, E)$ дерево решений, где V – множество вершин и E – множество дуг. Дерево решений $\mathcal{T} = (V, E)$, построенное для приведенного выше примера, изображено на рис. 2. Каждая вершина дерева решений $\mathcal{T} = (V, E)$ является перестановкой $\pi^{k,m} = (J_{k_1}, \dots, J_{k_m}) \in V$, $1 \le m \le n$, некоторых требований множества $\mathcal{J}$. Дуга $[\pi^{k,m}, \pi^{l,m+1}]$ принадлежит множеству E, если перестановка $\pi^{l,m+1} = (J_{l_1}, \dots, J_{l_{m+1}})$, $m \le n-1$, была получена из перестановки $\pi^{k,m} = (J_{k_1}, \dots, J_{k_m})$, т.е. равенство $J_{k_i} = J_{l_i}$ выполняется для всех индексов $i \in \{1, \dots, m\}$. Корень дерева решений $\mathcal{T} = (V, E)$ является пустой перестановкой (обозначим пустую перестановку через $\pi^{*,0}$). Процесс поиска начинается с дерева решений:

$$\mathcal{T} := \left(\{\pi^{*,0}\}, \emptyset\right).$$

Множество вершин ранга $h = 1$ в дереве решений определяется множеством требований $X(h) \subseteq \mathcal{J}$, которые не имеют предшественников в орграфе $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$. В приведенном выше примере получаем $X(h) = \{J_1, J_2\}$, поскольку у обоих требований J_1 и J_2 нет предшественников в орграфе $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ (см. рис. 1).

На первой итерации дерево решений $\mathcal{T} = (V, E)$ для приведенного примера строится следующим образом:

$$V := \left\{\pi^{*,0},\ \pi^{1,1} = (J_1),\ \pi^{2,1} = (J_2)\right\}, \quad E := \left\{[\pi^{*,0},\ (J_1)],\ [\pi^{*,0},\ (J_2)]\right\}.$$

Это значит, что как требование J_1, так и требование J_2 могут быть расположены в первой позиции искомой перестановки с наибольшим относительным объемом области устойчивости.

Множество вершин уровня $h = 2$ в дереве решений определяется множеством требований $X(h)$, которые не имеют предшественников в орграфе, полученном из $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ после удаления вершин множества $X(h-1) = X(1)$.

На второй итерации дерево решений $\mathcal{T} = (V, E)$ для рассматриваемого примера строится следующим образом:

$$V := \left\{\pi^{*,0}, \pi^{1,1} = (J_1), \pi^{2,1} = (J_2), \pi^{3,2} = (J_1, J_2), \pi^{4,2} = (J_2, J_1)\right\},$$
$$E := \left\{[\pi^{*,0}, (J_1)],\ [\pi^{*,0}, (J_2)],\ [(J_1), (J_1, J_2)],\ [(J_2), (J_2, J_1)]\right\}.$$

Аналогично строятся вершины остальных рангов дерева решений до тех пор, пока не будет получено подмножество полных перестановок $\pi^{k,n} = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n}) \in V$. Это подмножество множества S должно содержать, по крайней мере, одну перестановку множества $S(T)$ с наибольшим относительным объемом области устойчивости.

Правило сокращения ветвления в дереве решений $\mathcal{T} = (V, E)$ основано на теореме доминирования 19, где $Vol\mathcal{SB}(\pi^{k,m}, T)$ обозначает относительный объем области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi^{k,m}, T)$.

Теорема 19. *Пусть вершины $\pi^{k,m} \in V$ и $\pi^{l,m} \in V$, $1 \leq m < n$, удовлетворяют условиям:*

$$\{J_{k_1}, \ldots, J_{k_m}\} = \{J_{l_1}, \ldots, J_{l_m}\}, \tag{12}$$

$$Vol\mathcal{SB}(\pi^{k,m}, T) \geq Vol\mathcal{SB}(\pi^{l,m}, T). \tag{13}$$

Тогда вершина $\pi^{l,m} \in V$ может быть удалена из множества вершин, подлежащих дальнейшему ветвлению в дереве решений $\mathcal{T} = (V, E)$.

Доказательство. Для каждой частичной перестановки $\pi^{k,m} = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_m}) \in V$, где $1 \leq m < n$, можно вычислить область устойчивости $\mathcal{SB}(\pi^{k,m}, T)$, используя равенство (11), и вычислить значение $Vol\mathcal{SB}(\pi^{k,m}, T)$ как произведение относительных *максимально возможных вариаций* отношений весов к длительностям для всех требований J_{k_i}, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

При назначении требования J_{k_m} на позицию m в перестановке $\pi^{k,m}$ множество требований разбивается деревом $\mathcal{J}$ на два подмножества относительно полной перестановки $\pi_u = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_{m-1}}, J_{k_m}, J_{k_{m+1}} \ldots, J_{r_m}) \in S$. Одно из подмножеств – множество требований $\{J_{k_1}, \ldots, J_{k_{m-1}}\}$, расположенных перед требованием J_{k_m}, второе из подмножеств – множество требований $\{J_{k_{m+1}} \ldots, J_{r_m}\}$, расположенных после требования J_{k_m} в перестановке π_u. *Максимально возможная вариация* отношений веса к длительности для требования J_{k_m} может быть вычислена по формулам (9) и (10). Очевидно, что результат вычислений не зависит от порядка следования требований внутри множества $\{J_{k_1}, \ldots, J_{k_{m-1}}\}$ и внутри множества $\{J_{k_{m+1}} \ldots, J_{r_m}\}$.

Таким образом, если равенство (12) и неравенство (13) выполняются для перестановок $\pi^{k,m} \in V$ и $\pi^{l,m} \in V$, то перестановка $\pi^{l,m} \in V$ может быть исключена из дальнейшего ветвления.

Возвращаясь к примеру, строим дерево решений, изображенное на рис. 2, где

$$\begin{aligned}
&\pi^{5,3} = (J_1, J_2, J_3), \quad \pi^{6,3} = (J_1, J_2, J_4), \quad \pi^{7,4} = (J_1, J_2, J_3, J_4),\\
&\pi^{8,4} = (J_1, J_2, J_4, J_3), \quad \pi^{9,4} = (J_1, J_2, J_4, J_5),\\
&\pi^{10,4} = (J_1, J_2, J_4, J_6), \quad \pi^{11,5} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5),\\
&\pi^{12,5} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_6), \quad \pi^{13,5} = (J_1, J_2, J_4, J_5, J_3),\\
&\pi^{14,5} = (J_1, J_2, J_4, J_5, J_6), \quad \pi^{15,5} = (J_1, J_2, J_4, J_6, J_3),\\
&\pi^{16,5} = (J_1, J_2, J_4, J_6, J_5), \quad \pi^{17,6} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6),\\
&\pi^{18,6} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_6, J_5), \quad \pi^{19,6} = (J_1, J_2, J_4, J_5, J_6, J_3).
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что для вершин $\pi^{3,2} = (J_1, J_2) \in V$ и $\pi^{4,2} = (J_2, J_1) \in V$ в дереве решений $\mathcal{T} = (V, E)$ выполняется условие (13):

$$Vol\mathcal{SB}(\pi^{3,2}, T) \geq Vol\mathcal{SB}(\pi^{4,2}, T).$$

Кроме того, перестановка $\pi^{3,2}$ и перестановка $\pi^{4,2}$ включают одно и то же множество требований $\{J_1, J_2\}$, т.е. условие (12) выполняется для вершин $\pi^{3,2} \in V$ и $\pi^{4,2} \in V$. Таким образом, согласно теореме 19 нет необходимости ветвить процесс поиска из вершины $\pi^{4,2}$ в дереве решений $\mathcal{T} = (V, E)$.

Из аналогичных соображений нет необходимости ветвления из вершин $\pi^{8,4} = (J_1, J_2, J_4, J_3) \in V$, $\pi^{13,5} = (J_1, J_2, J_4, J_5, J_3) \in V$, $\pi^{15,5} = (J_1, J_2, J_4, J_6, J_3) \in V$,

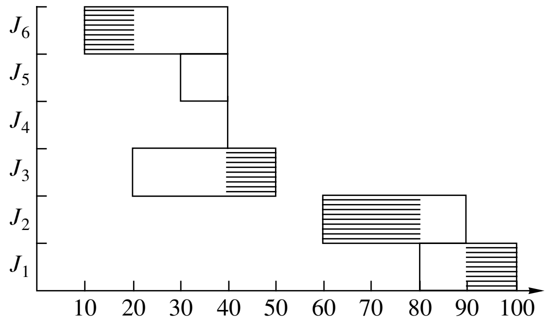

Рис. 3. *Возможные вариации* отношений весов к длительностям обслуживания требований для перестановки π_1 заштрихованы.

и $\pi^{16,5} = (J_1, J_2, J_4, J_6, J_5) \in V$ (см. рис. 2). После исключения вершин из множества вершин для дальнейшего ветвления в дереве решений $\mathcal{T} = (V, E)$, остаются только три перестановки S, построенные в дереве решений, а именно, перестановка $\pi_1 = \pi^{17,6} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6) \in S$, перестановка $\pi_2 = \pi^{18,6} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_6, J_5) \in S$ и перестановка $\pi_3 = \pi^{19,6} = (J_1, J_2, J_4, J_5, J_6, J_3) \in S$. Согласно теореме 19 достаточно исследовать только эти перестановки π_1, π_2 и π_3 как претендентов на максимальный объем области устойчивости.

Вычислим область устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_1, T)$ для перестановки $\pi_1 = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6) \in V$. Интервалы отношения весов к длительностям перестановки π_1 представлены в столбцах 5 и 6 табл. 1. Значения d_i^- и d_i^+, вычисленные по формулам (9) и (10), представлены в столбцах 7 и 8 табл. 1. *Максимально возможные вариации* отношений весов к длительностям обслуживания требований в перестановке π_1 отражены в координатной системе на рис. 3. Ось абсцисс используется для отображения отношения веса к длительности. Ось ординат используется для отображения требований множества $\mathcal{J}$, порядок следования которых определяется перестановкой π_1. *Возможные вариации* отношений весов к длительностям обслуживания требований заштрихованы. *Максимально возможные вариации* отношений весов к длительностям перестановки π_1 представлены в столбцах 9 и 10 табл. 1. Таким образом, объем области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_1, T)$ перестановки π_1 вычисляется следующим образом: $\left(4\frac{4}{9} - 4\right)\left(9 - 6\frac{3}{4}\right)(5-4)(16-8) = 13\frac{1}{3}$. Размерность $|N_1|$ области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_1, T)$ равна 5, поскольку неравенство $d_5^- > d_5^+$ выполняется только для требования J_5 (см. столбцы 7 и 8 в табл. 1).

Аналогично можно вычислить объем и размерность области устойчивости для перестановок $\pi_2 \in V$ и $\pi_3 \in V$. Объем области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_2, T)$ перестановки π_2 равен $\left(4\frac{4}{9} - 4\right)\left(9 - 6\frac{3}{4}\right)(5-4) = 1\frac{2}{3}$. Размерность $|N_2|$ области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_2, T)$ равна 4. Объем области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_3, T)$ перестановки π_3 равен $\left(4\frac{4}{9} - 4\right)\left(9 - 6\frac{3}{4}\right) = 1\frac{2}{3}$. Размерность $|N_3|$ области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_3, T)$ равна 3.

Таким образом, наибольший объем области устойчивости получен у перестановки $\pi_1 = \pi^{17,6} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6)$.

Далее представлен метод ветвей и границ, где множество $X(h)$ – множество вершин орграфа $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ без предшественников, $V(h)$ – множество вершин дерева решений, подлежащих дальнейшему ветвлению.

Алгоритм MAXSTABOX

Вход: Отрезки $[p_i^L, p_i^U]$, веса w_i, $J_i \in \mathcal{J}$.
Выход: Перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ с максимальным значением $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$.

Шаг 1: Строим орграф $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$.

Шаг 2: Определяем дерево решений $\mathcal{T} := (\{\pi^{*,0}\}, \emptyset)$.

Шаг 3: Полагаем $h = 1$ и $V(h) = X(h)$. Включаем вершины множества $X(h)$ в дерево $\mathcal{T}$.

Шаг 4: **IF** максимальный ранг вершин дерева $\mathcal{T}$ равен n **THEN GOTO** шаг 7 **ELSE**

Шаг 5: **FOR** $\pi^{k,m} \in V(h)$ **DO** восстановить путь $\mu(\pi^{k,m})$ из корня дерева $\mathcal{T}$ в вершину $\pi^{k,m}$;
удалить все вершины пути $\mu(\pi^{k,m})$ из орграфа $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$;
каждая вершина полученного орграфа определяет новую вершину дерева решений T;
используя (11), вычислить многогранник устойчивости для частичной перестановки.
END FOR

Шаг 6: $h := h + 1$ и $V(h) = \emptyset$. Проверить условие (13) для каждого листа дерева решений $\mathcal{T}$,
для каждой пары которых выполняется условие (12).
IF оба условия теоремы 19 выполняются **THEN** удалить все такие листья из дерева решений $\mathcal{T}$ за исключением одного, для которого многогранник устойчивости имеет наибольший относительный объем.
Включить эту вершину во множество $V(h)$.
GOTO шаг 4.

Шаг 7: Используя алгоритм STABOX, выбрать перестановку π_k с наибольшим $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$
STOP.

Алгоритм MAXSTABOX позволяет найти перестановку $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ с максимальным значением $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$. Может существовать несколько перестановок с наибольшим относительным объемом области устойчивости, в частности, если у нескольких смежных требований перестановки π_k нет непустых *возможных вариаций* отношений весов к длительностям обслуживания требований. Чтобы упорядочить требования с нулевыми *возможными вариациями* отношений весов к длительностям, используем следующие две эвристики. Первая эвристика основана на сценарии, равном нижним границам длительностей обслуживания требований. Эта эвристика позволяет решать оптимально детерминированную задачу $1|p^L|\sum w_iC_i$ с длительностями обслуживания требований $p^L = (p_1^L, \ldots, p_n^L)$. Вторая эвристика основана на сценарии, равном верхним границам длительностей обслуживания требований. Вторая эвристика позволяет решать оптимально детерминированную задачу $1|p^U|\sum w_iC_i$ с длительностями обслуживания требований $p^U = (p_1^U, \ldots, p_n^U)$. Комбинирование алгоритма MAXSTABOX с первой эвристикой названо алгоритмом SL, а со второй эвристикой – алгоритмом UL.

4. Результаты эксперимента

В табл. 2 представлены результаты решения случайно сгенерированных задач $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_iC_i$ при $n \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$. Эксперимент, проведенный на ноутбуке, позволил оценить величину погрешности Δ

(в процентах) значения $\gamma^k_{p^*}$ целевой функции $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i C_i$, полученной для перестановки π_k с максимальным относительным объемом области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_1, T)$, относительно значения целевой функции $\gamma^t_{p^*}$ оптимальной перестановки с фактическими длительностями обслуживания требований $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*) \in T$:

$$\Delta = \frac{\gamma^k_{p^*} - \gamma^t_{p^*}}{\gamma^t_{p^*}}.$$

Фактические длительности обслуживания требований считались не известными на момент построения расписания. Алгоритмы SL и UL были реализованы на языке C++ и использованы при поиске перестановки $\pi_k \in S(T)$ с максимальным относительным объемом области устойчивости. Целочисленные значения нижней границы p_i^L и верхней границы p_i^U для случайно сгенерированных значений $p_i \in {R_+}^1$ длительностей обслуживания требований $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ были получены следующим образом. Сначала генерировался центр C отрезка $[p_i^L, p_i^U]$ с использованием равномерного распределения в диапазоне $[L, U]$: $L \le C \le U$. Затем нижняя граница p_i^L возможной длительности обслуживания требования определялась по формуле

$$p_i^L = C\left(1 - \frac{\delta}{100}\right).$$

Верхняя граница p_i^U определялась по формуле

$$p_i^U = C\left(1 + \frac{\delta}{100}\right).$$

В результате погрешность длительности обслуживания требований была равна $\delta\%$. В экспериментах тестировались задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ с погрешностью $\delta\%$ длительностей обслуживания $\delta \in \{0{,}1; 0{,}5; 1{,}0; 5{,}0; 10{,}0; 15{,}0; 25{,}0; 50{,}0\}$. Отрезок $[L, U]$ использовался для генерации центра C отрезка $[p_i^L, p_i^U]$: $L = 10$ и $U = 1000$. Для каждого требования $J_i \in \mathcal{J}$ веса $w_i \in {R_+}^1$ были равномерно распределены на отрезке $[1, 50]$. В отличие от длительностей обслуживания требований p_i^*, веса w_i были известны на момент построения расписания.

Для проведения экспериментов использовался ноутбук с процессором Intel Pentium Dual Core с частотой (CPU) 1,86 GHz и оперативной памятью (RAM) 2 GB. В табл. 2 представлены результаты экспериментов для 85 серий случайно сгенерированных задач $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$. В каждой серии содержалось 10 задач с одними и теми же значениями n и δ. Количество требований n в задаче указано в столбце 1. Погрешность δ случайно сгенерированных длительностей обслуживания требований (в процентах) приведены в столбце 2. Столбец 3 содержит среднее число $|\mathcal{A}|$ дуг в орграфе $G = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$, построенном при использовании условия (3) теоремы 2 (в процентах от числа дуг в полном орграфе без контуров порядка n):

$$|\mathcal{A}| : \frac{n(n-1)}{2} \cdot 100\%.$$

В столбце 4 приведена размерность $|N_k|$ области устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ перестановки π_k с максимальным относительным объемом области устойчивости. Другими словами, $|N_k|$ обозначает количество требований в перестановке π_k, для которых $d_i^- \le d_i^+$, где d_i^- и d_i^+ определяются согласно (9) и (10) соответственно.

В столбце 5 приведены средние значения $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ для перестановок с максимальным относительным объемом области устойчивости. Если $\mathcal{SB}(\pi_k, T) = T$ для всех задач в серии, то в столбце 5 среднее значение $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ равно единице.

Таблица 2. Случайно сгенерированные примеры для $[L, U] = [10, 1000]$ и $w_i \in [1, 50]$

n	δ (%)	$\lvert\mathcal{A}\rvert$ (%)	Среднее $\lvert N_k\rvert$	Среднее $Vol\mathcal{SB}(\pi_k, T)$	Точные решения		Средняя погрешность		Макс. погрешность		CPU время
					SL	SU	SL	SU	SL	SU	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	0,1	100	5	1	10	10	0	0	0	0	0,0
5	0,5	100	5	1	10	10	0	0	0	0	0,0
5	1	97,00	4,9	0,741	10	10	0	0	0	0	0,0
5	5	93,00	5	0,509	10	10	0	0	0	0	0,0
5	10	92,00	5	0,441	7	7	0,000931	0,000931	0,005934	0,005934	0,0
5	15	88,00	4,9	0,518	9	9	0,000381	0,000381	0,003811	0,003811	0,0
5	25	82,00	4,7	0,295	6	6	0,004766	0,004766	0,0326	0,0326	0,0
5	50	53,0	3,8	0,0441	5	5	0,010454	0,010454	0,058311	0,058311	0,0
10	0,1	100	10	1	10	10	0	0	0	0	0,0
10	0,5	99,33	9,9	0,757	10	10	0	0	0	0	0,0
10	1	98,89	10	0,677	9	9	0,000003	0,000003	0,000029	0,000029	0,0
10	5	95,78	9,8	0,258	9	9	0,000065	0,000065	0,000651	0,000651	0,0
10	10	93,11	9,7	0,0521	7	7	0,000158	0,000158	0,000961	0,000961	0,0
10	15	87,56	9,0	0,0254	3	3	0,002768	0,002768	0,00882	0,00882	0,0
10	25	71,11	6,5	0,0120	0	0	0,006057	0,006057	0,018855	0,018855	0,0
10	50	52,00	4,0	0,0139	0	0	0,02628	0,02628	0,05833	0,05833	0,0
15	0,1	99,90	15	0,982	10	10	0	0	0	0	0,0
15	0,5	99,62	15	0,806	10	10	0	0	0	0	0,0
15	1	98,48	14,9	0,337	7	7	0,000041	0,000041	0,000203	0,000203	0,0
15	5	96,10	14,5	0,0701	4	4	0,000273	0,000273	0,001192	0,001192	0,0
15	10	88,00	11,7	0,00690	2	2	0,001158	0,001158	0,004991	0,004991	0,0
15	15	84,29	10,5	0,00225	2	2	0,002474	0,002474	0,005859	0,005859	0,0
15	25	78,57	7,8	0,00371	1	1	0,006385	0,006385	0,017376	0,017376	0,0
15	50	54,38	3,8	0,0469	0	0	**0,025886**	0,026099	0,050611	0,050611	0,0
20	0,1	99,95	20	0,901	10	10	0	0	0	0	0,0
20	0,5	99,63	20	0,553	8	8	0,000003	0,000003	0,000029	0,000029	0,0
20	1	99,05	19,8	0,250	6	6	0,000019	0,000019	0,000112	0,000112	0,0

Таблица 2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	5	94,58	17,7	0,000272	1	1	0,000479	0,000479	0,001646	0,001646	0,0
20	10	88,26	13,6	0,000806	0	0	0,001955	0,001955	0,006086	0,006086	0,0
20	15	87,11	13,2	0,000130	1	1	0,002976	0,002976	0,008585	**0,008544**	0,0
20	25	70,89	6,8	0,0285	0	0	0,009162	0,009162	0,015119	0,015119	0,0
20	50	47,95	3,5	0,0437	0	0	**0,049569**	0,04958	**0,135189**	0,135295	3,3
30	0,1	99,89	29,9	0,699	8	8	0,000002	0,000002	0,000008	0,000008	0,0
30	0,5	99,53	29,3	0,255	6	6	0,000005	0,000005	0,000023	0,000023	0,0
30	1	98,78	29,3	0,00608	5	5	0,000021	0,000021	0,000097	0,000097	0,0
30	5	94,76	24,0	0,000001	0	0	**0,000409**	0,000412	**0,00143**	0,001469	0,0
30	10	89,17	16,5	0,00003	0	0	0,001823	0,001823	0,004153	0,004153	0,0
30	15	85,15	14,0	0,000298	0	0	**0,00396**	0,003976	0,007035	0,007035	0,1
30	25	75,17	6,5	0,0114	0	0	0,0069	**0,006895**	0,011764	**0,011716**	0,3
30	50	63,45	3,0	0,00031	0	0	0,041807	0,041807	0,041807	0,041807	1,0
40	0,1	99,92	39,9	0,699	10	10	0	0	0	0	0,0
40	0,5	99,38	39,0	0,0818	5	5	0,000009	0,000009	0,00003	0,00003	0,0
40	1	98,90	38,7	0,00206	1	1	**0,000017**	0,000019	**0,00005**	0,000064	0,0
40	5	94,73	28,1	≈ 0	0	0	0,000438	**0,000427**	0,001186	0,0001186	0,0
40	10	90,08	19,0	≈ 0	0	0	**0,001663**	0,00173	0,003472	0,003472	0,1
40	15	84,56	13,8	≈ 0	0	0	**0,004143**	0,004315	**0,006127**	0,006651	0,4
40	25	77,18	4,5	0,01076	0	0	0,009055	0,009055	0,012444	0,012444	1,0
50	0,1	99,92	49,4	0,612	7	7	0,000001	0,000001	0,000006	0,000006	0,1
50	0,5	99,46	48,9	0,00918	5	5	0,000005	0,000005	0,000031	0,000031	0,0
50	1	98,99	48,0	0,00029	1	1	0,000016	0,000016	0,000046	0,000046	0,0
50	5	94,75	31,8	≈ 0	0	0	**0,000455**	0,00046	**0,00073**	0,00073	0,2
50	10	89,81	18,6	≈ 0	0	0	0,001859	**0,001856**	0,002762	**0,002741**	0,6
50	15	85,42	13,7	≈ 0	0	0	0,003332	**0,00329**	0,005219	0,005219	6,0
50	25	76,33	7,0	0,03944	0	0	**0,007341**	0,007546	0,007953	0,007953	10,0
60	0,1	99,92	59,3	0,583	8	8	≈ 0	≈ 0	0,000001	0,000001	0,1
60	0,5	99,58	59,0	0,00394	3	3	0,000004	0,000004	0,000023	0,000023	0,1

Таблица 2 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	1	98,95	56,3	≈ 0	0	0	**0,000027**	0,000028	0,000086	0,000086	0,1
60	5	94,69	33,7	≈ 0	0	0	**0,000385**	0,000395	0,000978	**0,000973**	0,4
60	10	89,03	17,6	0,00117	0	0	0,001624	**0,001608**	0,002507	0,002507	5,5
60	15	84,60	10,9	0,00025	0	0	0,003656	**0,003645**	0,004973	0,004973	13,2
60	25	78,59	10,0	≈ 0	0	0	0,012855	**0,012783**	0,012856	**0,012784**	29,0
70	0,1	99,93	69,4	0,307	**8**	7	$\approx$ **0**	0,000001	0,000002	0,000002	0,1
70	0,5	99,42	66,4	≈ 0	0	0	**0,000008**	0,000009	0,000018	0,000018	0,2
70	1	98,90	65,1	≈ 0	0	0	0,000023	0,000023	0,000053	0,000053	0,3
70	5	95,10	35,7	≈ 0	0	0	0,000402	**0,000401**	0,000652	**0,000647**	0,9
70	10	89,87	17,4	0,000009	0	0	**0,001888**	0,001893	0,002908	**0,002904**	10,7
70	15	84,72	12,0	≈ 0	0	0	**0,002139**	0,002234	**0,002139**	0,002234	34,8
70	25	76,89	5,0	0,000003	0	0	0,008478	**0,008449**	0,008479	**0,00845**	361,0
80	0,1	99,95	79,4	0,467	7	7	≈ 0	≈ 0	0,000002	0,000002	0,3
80	0,5	99,44	76,4	≈ 0	1	1	0,000006	0,000006	0,000017	0,000017	0,4
80	1	98,87	71,2	≈ 0	0	0	0,000017	0,000017	0,00003	0,00003	0,5
80	5	94,43	34,1	≈ 0	0	0	**0,000471**	0,000472	**0,000756**	0,000777	6,7
80	10	89,32	16,0	≈ 0	0	0	0,00179	**0,001771**	**0,002297**	0,002304	106,5
80	15	85,38	11,0	0,00002	0	0	0,004137	**0,004123**	0,004137	**0,004123**	63,9
90	0,1	99,92	88,4	0,245	**6**	5	≈ 0	≈ 0	0,000001	0,000001	0,6
90	0,5	99,50	85,4	≈ 0	0	0	0,000003	0,000003	0,000007	0,000007	0,7
90	1	98,99	81,6	≈ 0	0	0	0,000021	0,000021	0,000038	0,000038	0,9
90	5	94,69	34,2	≈ 0	0	0	0,00047	**0,000469**	0,00067	0,00067	8,2
90	10	87,57	15,0	≈ 0	0	0	0,001945	**0,001898**	0,001945	**0,001898**	206,0
90	15	82,85	8,0	≈ 0	0	0	0,003454	**0,003328**	0,003454	**0,003328**	2842,0
100	0,1	99,93	98,1	0,0888	4	**5**	≈ 0	≈ 0	0,000002	**0,000001**	1,0
100	0,5	99,49	94,8	≈ 0	0	0	0,000006	0,000006	0,00001	0,00001	1,2
100	1	98,89	85,7	≈ 0	0	0	**0,000018**	0,00002	0,000029	0,000029	1,6
100	5	94,98	37,2	≈ 0	0	0	**0,000465**	0,000471	0,00067	**0,000634**	19,2
100	10	91,92	21,0	≈ 0	0	0	0,001067	**0,001063**	0,001068	**0,001064**	46,0

В столбцах 6 и 7 указано количество задач (из 10 задач в серии), для которых перестановка π_k с наибольшим относительным объемом области устойчивости дает то же оптимальное решение, что и оптимальное решение, полученное согласно алгоритмам SL и UL соответственно.

Средние и максимальные относительные погрешности Δ целевой функции $\gamma^k_{p^*}$, вычисленные для построенных согласно алгоритму MAXSTABOX перестановок π_k, относительно оптимальных значений целевой функции $\gamma^t_{p^*}$ для фактических длительностей обслуживания требований, приведены в столбцах 8 и 10 для алгоритма SL и в столбцах 9 и 11 для алгоритма SU. В столбце 12 указано среднее время решения одной задачи из серии для алгоритма SL и алгоритма SU (это время одинаково для обоих алгоритмов).

Из экспериментов видно, что условие (4) теоремы 3 выполняется для задач с малой погрешностью $\delta\%$, $\delta \in \{0{,}1; 0{,}5\}$ длительностей обслуживания требований (см. столбец 3) и для серии 11. Для всех задач этих серий перестановка π_k с наибольшим относительным объемом области устойчивости дает оптимальное решение (столбцы 6, 7). Если один алгоритм превосходит другой, то соответствующее число в табл. 2 выделено жирным шрифтом.

5. Заключение

В условиях жесткой конкуренции на современном инновационном и динамичном рынке предприятие должно использовать по максимуму оптимальную стратегию при принятии плановых решений, несмотря на неопределенность исходных данных. Расписание, минимизирующее потери в наихудшем случае (такое расписание строится в робастном методе [4, 5]), является оптимальным относительно наихудшего сценария. Однако на практике наихудший сценарий реализуется довольно редко. Действительно, маловероятно, что для фактического расписания все длительности обслуживания требований примут наиболее неблагоприятные для этого сценария значения. Следовательно, расписание, минимизирующее потери в наихудшем случае, может оказаться не конкурентоспособным для фактически реализованного сценария, который может быть очень далеким от наихудшего сценария. Кроме того, задача поиска расписания, минимизирующего потери в наихудшем случае для критерия $\sum C_i$, представляет собой NP-трудную задачу даже при двух возможных сценариях. Заметим в этой связи, что в большинстве реальных задач необходимо планировать большое количество требований, причем количество возможных сценариев также может быть довольно большим.

Стохастически оптимальное расписание для критерия $E(\sum w_i C_i)$ (см. [1]), выбираемое из множества списочных статичных расписаний (такое расписание минимизирует ожидаемую сумму взвешенных моментов завершения обслуживания требований при условии, что требования в расписании упорядочены к начальному моменту времени согласно выбранному списку приоритетов требований), может быть построено по правилу наименьшей взвешенной длительности обслуживания (WSEPT): требования следует обслуживать в порядке невозрастания отношения $\dfrac{w_i}{E(p_i)}$, где $E(p_i)$ обозначает ожидаемую случайную длительность обслуживания требования p_i (см. [1], с. 232). Такое стохастически оптимальное расписание будет фактически эффективным, если распределение вероятностей каждой случайной длительности обслуживания требования достоверно известно до начала построения расписания и если будет реализовано достаточно большое количество похожих сценариев для достаточно близких расписанческих задач. Однако такое стохастически оптимальное расписание может оказаться неконкурентоспособным для фактически реализованного (возможно, единичного) сценария. Кроме того, у предприятия может не быть достаточного количества попыток для компенсации потерь от использования стохастически оптимального расписания, которое оказалось не оптимальным для фактически реализованного сценария. Использование стохастически оптимальных расписаний в течение достаточно длительных промежутков времени (и для большого количества похожих сценариев) для предприятия может оказаться практически невозможным в силу того, что другие предприятия (его конкуренты) могут быть более успешными, благодаря достижению лучших результатов на рынке из-за более эффективной стратегии планирования.

На основе результатов [28] здесь из множеств возможных сценариев T выбрано подмножество сценариев $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$, для которых перестановка π_k заведомо является оптимальной. В силу определенных ограничений на множество требований $\mathcal{J}$ множество $S(T)$ оказывается единственным минимальным доминирующим множеством для неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$. Следовательно, доминирующее множество $S(T)$, являющееся минимальным по включению (см. условие (b) определения 1), является минимальным и по мощности. Ограничение на множество $\mathcal{J}$, которое обеспечивает единственность минимального доминирующего множества $S(T)$, приводит к отождествлению соответствующих требований без потерь во множестве потенциально оптимальных расписаний и с уменьшением размерности $n = |\mathcal{J}|$ исходной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$. Минимальное доминирующее множество перестановок $S(T) \subseteq S$ определено однозначно для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$, если выбирается только одно требование среди подмножества требований с одинаковыми отношениями весов к длительностям обслуживания. В случае существования нескольких требований с одним тем же точечным отношением веса к длительностям обслуживания можно сократить число требований, рассматриваемых в минимальном доминирующем множестве. Таким образом, условие единственности $S(T)$ не только не обременительно, но даже полезно. Было введено понятие многогранника устойчивости перестановки $\pi_k \in S$, который похож на шар ее устойчивости [12–14, 20]. При решении неопределенных задач многогранник устойчивости играет аналогичную роль, что и шар устойчивости [13, 14, 19–21, 29–31] в постоптимизационном анализе, когда исходные данные заранее известны и оптимальное решение построено для детерминированной задачи, а требуется определить область (шар) устойчивости построенного решения относительно возможных изменений исходных данных в пределах максимального радиуса.

Здесь была использована полученная в [28] точная формула вычисления многогранника устойчивости $\mathcal{SB}(\pi_k, T)$ для любой фиксированной перестановки $\pi_k \in S$, которую можно реализовать за $O(n \log n)$ действий. Разработан метод ветвей и границ для поиска перестановки с наибольшим относительным объемом многогранника устойчивости и представлены результаты точного и эвристического решения случайно сгенерированных задач на ноутбуке. В дальнейшем целесообразно продолжить исследования по использованию многогранника устойчивости для других неопределенных задач теории расписаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinedo M.* Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. 2nd ed. USA. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
2. *Aytug H., Lawley M. A., McKay K. et al.* Executing production schedules in the face of uncertainties: a review and some future directions // Eur. J. Oper. Res. 2005. V. 161. P. 86–110.
3. *Sabuncuoglu I., Goren S.* Hedging production schedules against uncertainty in manufacturing environment with a review of robustness and stability research // Int. J. Comput. Integrated Manufactur. 2009. V. 22. No 2. P. 138–157.
4. *Daniels R.L., Kouvelis P.* Robust scheduling to hedge against processing time uncertainty in single-stage production // Management Sci. 1995. V. 41. No 2. P. 363–376.

5. *Kouvelis P., Yu G.* Robust discrete optimization and its applications. USA, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.
6. *Yang J., Yu G.* On the robust single machine scheduling problem // J. Combinat. Optim. 2002. V. 6. P. 17–33.
7. *Lai T.-C., Sotskov Y.N., Sotskova N. et al.* Optimal makespan scheduling with given bounds of processing times // Math. Comput. Model. 1997. V. 26. P. 67–86.
8. *Lai T.-C., Sotskov Y.N.* Sequencing with uncertain numerical data for makespan minimization // J. Oper. Res. Soc. 1999. V. 50. P. 230–243.
9. *Sotskov Y.N., Sotskova N.Y.* Teoriya raspisanii: sistemi s neopredelennimi chislovimi parametrami (Scheduling theory: Systems with uncertain numerical parameters), Belarus, Minsk: National Academy of Sciences of Belarus. United Institute of Informatics Problems, 2004 (in Russian).
10. *Matsveichuk N.M., Sotskov Y.N., Egorova, N.G. et al.* Schedule execution for two-machine flow-shop with interval processing times // Math. Comput. Model. 2009. V. 49. No 5–6. P. 991–1011.
11. *Sotskov Y.N., Egorova N.G., Lai T.-C.* Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times // Math. Comput. Model. 2009. V. 50. P. 556–573.
12. *Lai T-C, Sotskov Y.N., Sotskova N.Y. et al.* Mean flow time minimization with given bounds of processing times // Eur. J. Oper. Res. 2004. V. 159. No 3. P. 558–573.
13. *Sotskov Y.N., Wagelmans A.P.M., Werner F.* On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule // Ann. Oper. Res. 1998. V. 83. P. 213–252.
14. *Sotskov Y.N., Sotskova N.Y., Werner F.* Stability of an optimal schedule in a job shop // Omega. 1997. V. 25. No 4. P. 397–414.
15. *Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K. et al.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling. A survey // Ann. Discr. Math. 1976. V. 5. P. 287–326.
16. *Smith W.E.* Various optimizers for single-stage production // Nav. Res. Logist. Quarterly. 1956. V. 3. No 1. P. 59–66.
17. *Kasperski A., Zielinski P.* A 2-approximation algorithm for interval data minmax regret sequencing problems with total flow time criterion // Oper. Res. Lett. 2008. V. 36. P. 343–344.
18. *Montemanni R.* A mixed integer programming formulation for the total flow time single machine robust scheduling problem with interval data // J. Math. Model. Algorith. 2007. V. 6. P. 287–296.
19. *Sotskov Y.N., Dolgui A., Portmann M.-C.* Stability analysis of optimal balance for assembly line with fixed cycle time // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 168. No 3. P. 783–797.
20. *Sotskov Y.N.* Stability of an optimal schedule // Eur. J. Oper. Res. 1991. V. 55. P. 91–102.
21. *Sotskov Y.N., Tanaev V.S., Werner F.* Stability radius of an optimal schedule: A survey and recent developments, Yu G. (Editor) // Industr. Appl. Combinat. Optim. USA. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 72–108.
22. *Сотскова Н.Ю., Танаев В.С.* О реализации оптимального расписания в условиях неопределенности длительностей операций // Докл. Нац. АН Беларуси. 1998. Т. 42. No 5. С. 8–12.
23. *Allahverdi A., Sotskov Y.N.* Two-machine flowshop minimum-length scheduling problem with random and bounded processing times // Int. Transactions Oper. Res. 2003. V. 10. P. 65–76.
24. *Allahverdi A., Aldowaisan T., Sotskov Y.N.* Two-machine flowshop scheduling problem to minimize makespan or total completion time with random and bounded setup times // Int. J. Math. Math. Sci. 2003. V. 39. P. 2475–2486.
25. *Ng C.T., Matsveichuk N.M., Sotskov Y.N. et al.* Two-machine flow-shop minimum-length scheduling with interval processing times // Asia-Pacific J. Oper. Res. 2009. V. 26. No 6. P. 1–20.
26. *Sotskov Y.N., Allahverdi A., Lai T.-C.* Flowshop scheduling problem to minimize total completion time with random and bounded processing times // J. Oper. Res. Soc. 2004. V. 55. P. 277–286.

27. *Coffman E.G.* Computer and Job-Shop Scheduling Theory. USA: John Wiley & Sons, 1976.
28. *Sotskov Y.N., Lai T.-C.* Minimizing total weighted completion time under uncertainty using stability box and dominance // Math. Comput. Model. (submitted).
29. *Emelichev V.A., Girlich E.N., Nikulin Y.V. et al.* Stability and regularization radius of vector problems of integer linear programming // Optim. 2002. V. 51. No 4. P. 645–676.
30. *Emelichev V.A., Krichko V.N., Nikulin Y.V.* The stability radius of an efficient solution in mimimax Boolean programming problem // Control Cybernet. 2004. V. 33. No 1. P. 127–132.
31. *Emelichev V.A., Kuz'min K.G., Leonovich, A.M.,* Stability in the combinatorial vector optimization problems // Automat. Remote Control. 2004. V. 65. No 2. P. 227–240.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 12.01.2010