УДК 519.8

Ю.Н. СОТСКОВ[а], Н.Г. ЕГОРОВА[а], Ф. ВЕРНЕР[б]

МНОГОГРАННИК ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО СУММУ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ЗАВЕРШЕНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

[а]Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

[б]Университет им. Отто фон Герике, г. Магдебург, Германия

Рассматривается задача минимизации суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований одним прибором при условии, что длительность обслуживания требования может принимать любое вещественное значение из заданного числового отрезка. В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки (расписания) обслуживания требований к изменениям длительностей их обслуживания предлагается использовать многогранник оптимальности расписания. Для случайно сгенерированных задач проведено экспериментальное сравнение размерностей и относительных объемов многогранников оптимальности расписаний обслуживания требований и относительных погрешностей целевых функций с оптимальными значениями целевых функций, вычисленными для фактических длительностей обслуживания требований.

1. Постановка задачи и обозначения. Множество требований $J=\{J_1, J_2, ..., J_n\}$, $n \geq 2$, необходимо обслужить одним прибором. Каждому требованию $J_i \in J$ приписан вес $w_i > 0$, характеризующий важность более раннего завершения обслуживания требования J_i. Все требования множества J доступны для обслуживания в момент времени $t = 0$. Фактическая длительность p_i обслуживания требования $J_i \in J$ может равняться любому вещественному числу, заключенному между фиксированными нижней и верхней границами: $p_i^U \geq p_i^L > 0$. Требование $J_i \in J$ должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$. Законы распределения вероятностей случайных длительностей p_i, $J_i \in J$, не известны к моменту построения расписания. При реализации расписания длительность p_i обслуживания требования J_i остается неопределенной до момента завершения обслуживания требования J_i, если $p_i^L < p_i^U$.

Для задач теории расписаний используется трехпозиционное обозначение $\alpha | \beta | \gamma$, где α определяет обслуживающую систему, β – свойства обслуживающей системы, а γ – критерий оптимальности [1]. Обозначение $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ используется для *неопределенной* задачи поиска оптимального расписания обслуживания одним прибором множества требований J, при котором взвешенная сумма $\sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ моментов C_i завершения обслуживания требований $J_i \in J$ принимает наименьшее значение. Если границы $p_i^L > 0$ и $p_i^U \geq p_i^L$ длительностей обслуживания каждого требования совпадают, $p_i^L = p_i^U$, то неопределенная задача $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ превращается в *детерминированную* задачу $1 || \sum w_i C_i$, которая решается за полиномиальное время [2].

Множество допустимых векторов длительностей обслуживания требований $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ обозначим $T = \{p \mid p \in R_+^n, \, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, \, i \in \{1, \ldots, n\}\} = \times_{i=1}^{n} [p_i^L, p_i^U]$, где R_+^n − векторное пространство неотрицательных действительных векторов размерности n, а $\times_{i=1}^{n} [p_i^L, p_i^U]$ − декартово произведение заданных интервалов возможных длительностей обслуживания требований. Фиксированный вектор $p \in T$ длительностей обслуживания требований будем называть *сценарием*. Детерминированную задачу $1||\sum w_i C_i$ со сценарием $p \in T$ будем обозначать $1|p|\sum w_i C_i$. Для задачи с неопределенными длительностями обслуживания требований $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\gamma$, как правило, не существует перестановки обслуживания требований множества J, которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества T. Для описания предлагаемого подхода к оценке качества эвристического решения неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ потребуются определения и результаты, представленные в следующем разделе.

2. Метод, основанный на устойчивости оптимального расписания. Пусть $S = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n!}\}$ − множество всех перестановок $\pi_k \in S$, определяющих порядок обслуживания требований из множества J: $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, ..., J_{k_n})$, где $\{k_1, k_2, ..., k_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Множество перестановок S имеет мощность $|S| = n!$.

В [2] было установлено, что для решения детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ требуется выполнить $O(n \log n)$ элементарных операций, если использовать следующее необходимое и достаточное условие оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1} J_{k_2}, \ldots, J_{k_n}) \in S$: $\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}} \ge \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}} \ge \ldots \ge \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}}$. Под *решением* неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ будем подразумевать минимальное (по включению) множество перестановок $S(T) \subseteq S$ согласно следующему определению [4].

Определение 1. Множество перестановок $S(T) \subseteq S$ называется *минимальным доминирующим множеством* для задачи $\alpha|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\gamma$, если выполняются условия (a) и (b): (a) для каждого сценария $p \in T$ множество $S(T)$ содержит хотя бы одну перестановку обслуживания требований, которая является оптимальной для детерминированной задачи $\alpha|p|\gamma$; (b) свойством (a) не обладает ни одно собственное подмножество множества $S(T)$.

Мощность $|S(T)|$ минимального доминирующего множества $S(T)$ можно рассматривать как меру неопределенности задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$. В случае наименьшего значения $|S(T)| = 1$ минимальное доминирующее множество для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ является одноэлементным множеством: $\{\pi_k\} = S(T)$, которое является *решением* (оптимальным расписанием) детерминированного аналога $1|p|\sum w_i C_i$ неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ при любом сценарии $p \in T$. Минимальное доминирующее множество $S(T)$ может быть построено для неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ на основе следующего отношения доминирования, которое можно эффективно (полиномиально) задать на множестве требований J [4].

Определение 2. Требование $J_u \in J$ *доминирует* требование $J_v \in J$ относительно T, если существует минимальное доминирующее множество $S(T)$ для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ такое, что требование J_u предшествует требованию J_v в каждой перестановке требований из множества $S(T)$.

В статье [3] доказаны следующие утверждения для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$.

Теорема 1. *Для задачи* $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ *требование* J_u *доминирует требование* J_v *относительно* T *тогда и только тогда, когда* $\frac{w_u}{p_u^U} \ge \frac{w_v}{p_v^L}$.

Т е о р е м а 2. *Для того, чтобы перестановка* $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n})$ *определяла одноэлементное доминирующее множество* $S(T) = \{\pi_k\} = \{(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n})\}$ *для задачи* $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$, *необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:*

$$\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}^U} \ge \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^L}; \quad \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^U} \ge \frac{w_{k_3}}{p_{k_3}^L}; \quad \ldots \quad \frac{w_{k_{n-1}}}{p_{k_{n-1}}^U} \ge \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}^L}. \tag{1}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $p_i^L < p_i^U$, $J_i \in J$. *Для существования минимального доминирующего множества* $S(T)$ *максимальной мощности* $|S(T)| = n!$ *для задачи* $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max\left\{\frac{w_i}{p_i^U} \mid J_i \in J\right\} < \min\left\{\frac{w_i}{p_i^L} \mid J_i \in J\right\}.$$

При применении метода, основанного на устойчивости оптимального расписания, для решения неопределенной задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$ остается открытым вопрос, какую перестановку следует выбирать из минимального доминирующего множества $S(T)$ для практической реализации в случае, когда условие (1) теоремы 2 не выполняется. Поскольку точное решение неопределенной задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$ в общем случае невозможно, то предлагается использовать эвристический алгоритм для построения перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n}) \in S(T)$. В разделе 3 показано, как можно оценить качество эвристического решения задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$ до реализации расписания на примере построенной перестановки $\pi_r \in S(T)$. Минимальную среднюю погрешность по сравнению с оптимальной перестановкой, полученной для случайного сгенерированного сценария задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$, дают перестановки $\pi_r \in S(T)$, в которых требования отсортированы в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания требований. Алгоритм сортировки требований в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания можно представить следующим образом.

Алгоритм ЭВРИСТИКА

Вход: Отрезки $[p_i^L, p_i^U]$ и веса w_i требований $J_i \in J$.

Выход: Перестановка $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n}) \in S(T)$ обслуживания требований J.

Шаг 1. Для каждого требования $J_i \in J$ вычислить значение $w_i / ((p_i^L + p_i^U)/2)$.

Шаг 2. Построить перестановку $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n}) \in S(T)$, упорядочив требования множества J в порядке невозрастания значений $w_i / ((p_i^L + p_i^U)/2)$.

Очевидно, для реализации алгоритма ЭВРИСТИКА требуется $O(n \log n)$ элементарных операций. В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки $\pi_k \in S(T)$ к изменениям длительностей обслуживания требований множества J будем использовать многогранник оптимальности этой перестановки.

3. Многогранник оптимальности перестановки обслуживания требований. В статье [5] рассматривается многогранник (параллелепипед) оптимальности перестановки π_k, который содержится в области устойчивости перестановки π_k. Пусть N_k – подмножество множества индексов i всех требований $J_i \in J$.

О п р е д е л е н и е 3. Максимальный замкнутый параллелепипед $OB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k} [\hat{l}_{k_i}, \hat{u}_{k_i}] \subseteq T$ называется многогранником оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n}) \in S$ относительно T, если при любом сценарии $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n) \in T$, при котором перестановка π_k оптимальна для задачи $1|p|\sum w_i C_i$, эта перестановка остается оптимальной и для задачи $1|p'|\sum w_i C_i$ при сценарии $p' \in OB(\pi_k, T) \times \{\times_{k_j \in N \setminus N_k} [p_{k_j}, p_{k_j}]\}$. Если не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k оптимальна для задачи $1|p|\sum w_i C_i$, то полагаем $OB(\pi_k, T) = \varnothing$.

Для построения многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для перестановки π_k предлагается использовать алгоритм построения многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для той же перестановки для соответствующей задачи $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum w_i C_i$ с редуцированными интервалами длительностей обслуживания требований (рис. 1) $[\hat{p}_i^L, \hat{p}_i^U] \subseteq [p_i^L, p_i^U]$ для всех $i \in \{1,2,...,n\}$, полученными по следующим формулам:

$$\frac{w_i}{\hat{p}_i^L} = \min_{1 \le j \le i}\left\{\frac{w_j}{p_j^L}\right\}, \ \frac{w_i}{\hat{p}_i^U} = \max_{i \le j \le n}\left\{\frac{w_j}{p_j^U}\right\}.$$

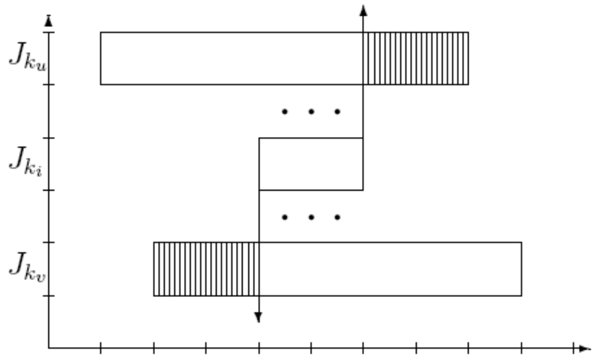

Рис. 1 – Отсекаемые в редуцированной задаче интервалы изменений отношения весов к длительностям обслуживания требований заштрихованы прямыми вертикальными линиями

Задачу $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum w_i C_i$ с редуцированными интервалами возможных длительностей обслуживания требований будем называть *редуцированной* задачей.

В статье [5] разработан алгоритм сложности $O(n)$ построения многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$, основанный на следующей теореме.

Теорема 4. *Многогранник оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для неопределенной задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum w_i C_i$ совпадает с многогранником оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для редуцированной задачи $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum w_i C_i$.*

Нетрудно доказать, что если выполняется условие (1) теоремы 2, то многогранник оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n})$, для которой $S(T) = \{\pi_k\}$, совпадает с множеством $T = \{p \mid p \in R_+^n,\ p_i^L \le p_i \le p_i^U,\ i \in \{1,\ldots,n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ возможных сценариев. В этом случае для любого сценария $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n) \in T$ оптимальная перестановка для задачи $1|p|\sum w_i C_i$ совпадает с перестановкой $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n})$, построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА. В разделе 4 многогранники оптимальности перестановок, полученных с помощью алгоритма ЭВРИСТИКА, оцениваются экспериментально.

4. Результаты вычислительного эксперимента. В проведенном на компьютере вычислительном эксперименте каждая серия задач состояла из 100 случайно сгенерированных задач с одинаковыми количествами требований n и заданными максимальными погрешностями δ длительностей обслуживания требований. Целочисленные значения нижней границы p_i^L и верхней границы p_i^U для возможных значений $p_i \in R_+^1$ длительностей обслуживания требований $[p_i^L, p_i^U]$ были получены следующим образом. Вначале на числовом отрезке $[L,U]$: $L \le C \le U$, $[L,U]=[10,100]$ случайно выбирался центр C искомого отрезка $[p_i^L, p_i^U]$ с использованием равномерного закона распределения случайных величин. Нижняя граница p_i^L возможной длительности обслуживания требования определялась по формуле $p_i^L = C\left(1-\frac{\delta}{100}\right)$, а верхняя граница p_i^U определялась по формуле $p_i^U = C\left(1+\frac{\delta}{100}\right)$. Случайно выбранные веса $w_i \in R_+^1$ каждого требования $J_i \in J$ были равномерно распределены на отрезке $[1,50]$. Полученные значения весов w_i считались известными на момент построения расписания.

Все алгоритмы для проведенного эксперимента были реализованы на алгоритмическом языке C++. Эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Pentium (R) с частотой (CPU) 3.00 GHz и оперативной памятью (RAM) 1024 MB.

Для каждой рассмотренной в эксперименте задачи $1|\, p_i^L \le p_i \le p_i^U \,|\sum w_i C_i$ строилась перестановка требований $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n})$ по алгоритму ЭВРИСТИКА и определялся многогранник оптимальности для построенной перестановки. Затем случайным образом выбирался фактический сценарий $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ из множества T возможных сценариев. Для выбранного сценария $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ строилась оптимальная для задачи $1|\, p^* \,|\sum w_i C_i$ перестановка по алгоритму Смита [2]. Пусть $\Phi^0 = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i^0$ обозначает значение целевой функции для перестановки $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n})$, построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, а $\Phi^* = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i^*$ – оптимальное значение целевой функции для случайно сгенерированной задачи $1|\, p^* \,|\sum w_i C_i$ с фактическими длительностями $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ обслуживания требований. Относительная погрешность целевой функции может быть вычислена по формуле $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*)/\Phi^*]\cdot 100\%$. Основная цель вычислительного эксперимента состояла в сравнении многогранников оптимальности с относительными погрешностями перестановок $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_n})$, построенных по алгоритму ЭВРИСТИКА. В таблице представлены результаты вычислительных экспериментов для случайно сгенерированных задач $1|\, p_i^L \le p_i \le p_i^U \,|\sum w_i C_i$ с количеством требований $n \in \{200, 400, \ldots, 1000\}$ и максимальной погрешностью $\delta\% \in \{1\%, 5\%, 10\%, 15\%, 40\%\}$ заданных длительностей обслуживания требований.

В столбце 1 таблицы указаны количества требований n в рассмотренных в эксперименте задачах, в столбце 2 – погрешности δ случайно сгенерированных интервалов длительностей обслуживания требований (в процентах). В столбце 3 приведены средние значения размерностей $|N_k|$ многогранников оптимальности $OB(\pi_r, T)$ перестановок π_r. В столбце 4 приведены средние относительные объемы $VolOB(\pi_r, T)$ многогранников оптимальности, полученные по следующей формуле: $VolSB(\pi_r, T) = \prod_{\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}} \frac{\hat{u}_{r_i} - \hat{l}_{r_i}}{p_{r_i}^U - p_{r_i}^L}$. В столбце 5 приведены средние значения относительных погрешностей $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*)/\Phi^*]\cdot 100\%$ для каждой серии решенных в эксперименте задач, в столбце 6 – суммарное время решения всей серии из 100 задач.

Для перестановки $\pi_r \in S(T)$, построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность $\varDelta = [(\varPhi^0 - \varPhi^*)/\varPhi^*] \cdot 100\%$ полученных решений для серии задач, имеет максимальное значение 0,037021%, среднее значение 0,008318% и минимальное значение 0,000114%. Минимальным (по сериям задач) средним значениям Δ={0,000155, 0,000129, 0,000145, 0,000114, 0,000124} соответствуют серии задач с δ%=1%, которым соответствуют максимальные средние значения {73,72; 68,13; 61,23; 60,09; 57,4} размерностей многогранников оптимальности. Максимальным (по сериям задач) средним значениям Δ={0,037021; 0,032195; 0,033839; 0,032018; 0,031889} соответствуют серии задач с δ%=40%, которым соответствуют минимальные средние значения {2,3; 2,07; 1,99; 1,98; 1,94} размерностей многогранников оптимальности.

Таблица – Результаты решения случайно сгенерированных задач для $w_i \in [1,50]$ и $n \in \{200,400,\ldots,1000\}$.

Число требований n	Максимальная погрешность δ% длительностей $p_i, J_i \in J$	Средняя размерность многогранника $OB(\pi_r, T)$	Относительный объем многогранника оптимальности $VolOB(\pi_r, T)$	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\varPhi^0 - \varPhi^*)}{\varPhi^*} \cdot 100\%$ полученных решений	Время работы процессора в секундах для серии задач
1	2%	3	4	5	6
200	1%	73,72	5,12E-19	0,000155%	0
200	5%	19,12	2,28E-06	0,00054%	1
200	10%	8,46	1,18E-02	0,002631%	0
200	15%	5,44	4,47E-02	0,004611%	0
200	40%	2,3	1,68E-01	0,037021%	1
400	1%	68,13	1,73E-17	0,000129%	1
400	5%	15,43	2,48E-04	0,000767%	1
400	10%	7,12	1,40E-02	0,001933%	1
400	15%	4,43	5,29E-02	0,005636%	1
400	40%	2,07	1,81E-01	0,032195%	1
600	1%	61,23	4,84E-14	0,000145%	2
600	5%	13,55	1,38E-03	0,000706%	3
600	10%	5,53	2,07E-02	0,002416%	2
600	15%	3,79	6,52E-02	0,005113%	3
600	40%	1,99	1,46E-01	0,033839%	3
800	1%	60,09	1,97E-12	0,000114%	4
800	5%	11,46	6,23E-03	0,000731%	4
800	10%	5,24	4,28E-02	0,002289%	4
800	15%	3,53	7,39E-02	0,005035%	5
800	40%	1,98	1,22E-01	0,032018%	4
1000	1%	57,4	3,58E-10	0,000124%	6
1000	5%	10,85	2,42E-03	0,000657%	7
1000	10%	4,92	3,35E-02	0,002243%	6
1000	15%	3,05	8,81E-02	0,00502%	7
1000	40%	1,94	1,62E-01	0,031889%	7

При увеличении максимальной погрешности δ длительностей обслуживания требований средняя погрешность Δ целевой функции растет для каждой серии задач, а средняя величина размерности многогранника оптимальности уменьшается (рис. 3а-3б). Имеет место корреляция роста погрешности Δ и уменьшения размеров многогранника оптимальности $OB(\pi_r, T)$. Из проведенного эксперимента следует, что погрешность Δ

целевой функции слабо зависит от количества требований при фиксированной погрешности δ длительностей обслуживания требований (рис. 2).

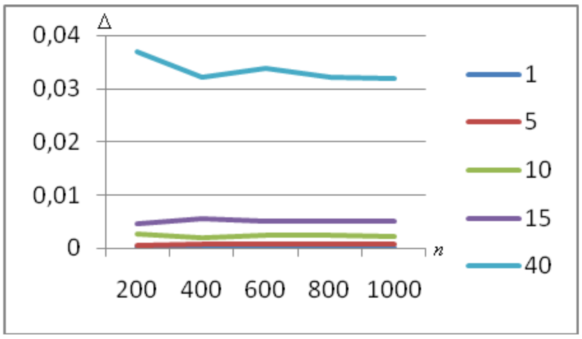

Рис. 2 – Зависимость погрешности целевой функции от количества требований

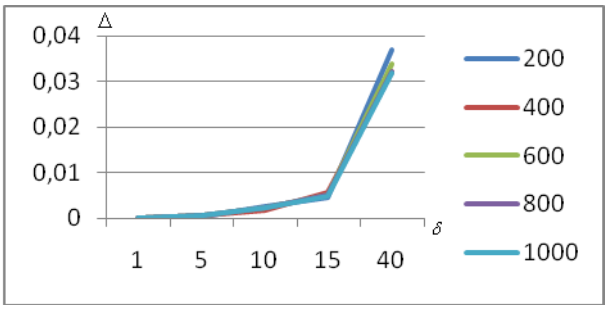

Рис. 3а – Зависимость погрешности целевой функции Δ от максимальной погрешности δ длительностей $p_i, J_i \in J$

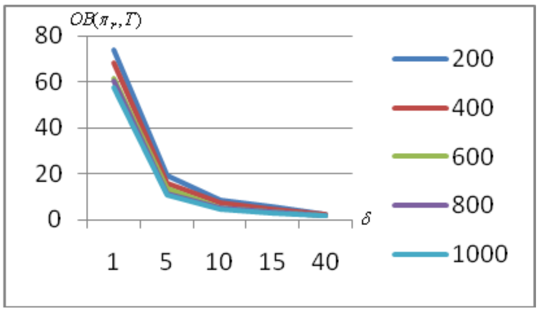

Рис. 3б – Зависимость размеров многогранника оптимальности перестановки $\pi_r \in S(T)$ от максимальной погрешности δ длительностей $p_i, J_i \in J$

Проводился также эксперимент с целью выявления для многогранников оптимальности $OB(\pi_r, T)$ с одинаковыми размерностями зависимости погрешностей значений целевых функций от количества требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$. Проводился эксперимент по определению для многогранников оптимальности перестановки $\pi_r \in S(T)$ с одинаковыми размерностями и одинаковым количеством требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$, зависимости погрешностей значений целевых функций от объема многогранника оптимальности. При уменьшении количества требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$, в случае одинаковых размерностей многогранников оптимальности в серии задач относительная погрешность целевой функции растет (рис. 4). В случае увеличения объема $VolOB(\pi_k, T)$ многогранников оптимальности при равных значениях размерностей многогранников оптимальности и требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$, относительная погрешность целевой функции убывает (рис. 5а-5б)

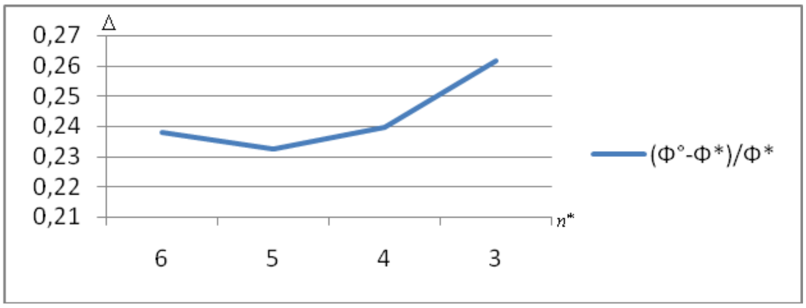

Рис. 4 – Зависимость погрешности целевой функции от количества n^* требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ при одинаковых размерностях многогранников $OB(\pi_r, T)$

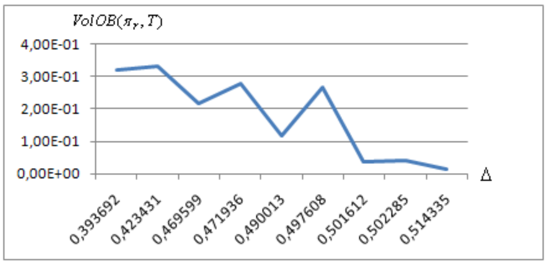

Рис. 5а – Уменьшение относительного объема многогранника оптимальности $OB(\pi_r, T)$ при увеличении Δ для серии задач А с одинаковыми размерностями многогранника и одинаковыми количествами n^* требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$

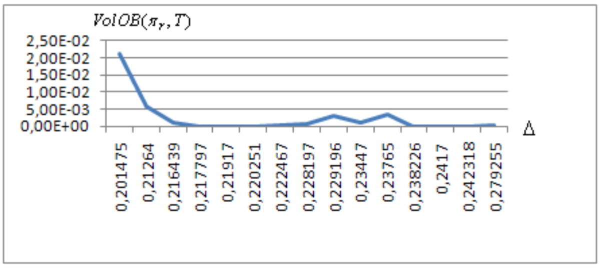

Рис. 5б – Уменьшение относительного объема многогранника оптимальности $OB(\pi_r, T)$ при увеличении Δ для серии задач Б с одинаковыми размерностями многогранника и одинаковыми количествами n^* требований J_{r_i}, для которых $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$

Таким образом, целесообразно из всех перестановок множества $S(T)$ выбирать для реализации перестановку с наибольшей размерностью многогранника оптимальности. Если таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку, имеющую минимальное количество n_k требований J_{r_i}, для которых выполняется равенство $\hat{l}_{r_i} = \hat{u}_{r_i}$. Если и таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку π_k с наибольшим относительным объемом $VolOB(\pi_k, T)$ многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$.

5. Заключение. Согласно проведенному эксперименту, для перестановки $\pi_r \in S(T)$, построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*)/\Phi^*] \cdot 100\%$ полученных решений для серии случайно сгенерированных задач $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$ имела максимальное значение 0,037021% и среднее значение 0,008318%. При увеличении максимальной погрешности δ длительностей обслуживания требований средние значения относительной погрешности Δ целевой функции $\gamma = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i$ росли для каждой серии решенных задач, а средние значения размерностей и объемов $VolOB(\pi_k, T)$ многогранников оптимальности $OB(\pi_k, T)$ уменьшались пропорционально росту погрешности Δ целевой функции.

Размерность, объем и другие характеристики многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$ можно вычислить до реализации расписания обслуживания требований, и поэтому они могут быть использованы для выбора перестановки, оптимальность которой более устойчива к возможным вариациям длительностей обслуживания требований. Таким образом, целесообразно из всех перестановок минимального доминирующего множества $S(T)$ выбирать для практической реализации перестановку $\pi_k \in S(T)$ с наибольшим по размерности и объему многогранником оптимальности $OB(\pi_k, T)$.

Разработка алгоритмов построения перестановок требований с наибольшим многогранником оптимальности $OB(\pi_k, T)$ представляет интерес для дальнейших исследований неопределенной задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum w_i C_i$.

Литература

1. Graham, R.L. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey / R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan // Annals of Discrete Mathematics. – 1976. V. 5. – P. 287 – 326.

2. Smith, W.E. Various Optimizers for Single-Stage Production / W.E. Smith // Naval Research Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3, № 1. – P. 59 – 66.

3. Sotskov, Yu.N. Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times / Yu.N. Sotskov, N.G. Egorova, T.-C. Lai // Mathematical and Computer Modelling. – 2009. – Vol. 50, №3 – 4.– P. 556 – 573.

4. Sotskov, Yu. N. Scheduling under uncertainty: theory and algorithms / Yu.N. Sotskov, N.Yu. Sotskova, T.-C. Lai, F. Werner // RUE «Publishing House «Belorusskaya nauka». – 2010. – 326 p.

5. Сотсков, Ю.Н. Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований / Ю.Н. Сотсков, Н.Г. Егорова // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 7. – С. 136 – 154.

Y. N. SOTSKOV, N. G. EGOROVA, F. WERNER

THE OPTIMALITY BOX OF THE SCHEDULE MINIMIZING THE SUM OF THE WEIGHTED COMPLETION TIMES OF THE JOB

Резюме

В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки π обслуживания в одностадийной обслуживающей системе множества требований к изменениям длительностей обслуживания требований предлагается использовать размерность и относительный объем многогранника оптимальности перестановки π. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что целесообразно из минимального доминирующего множества перестановок обслуживания требований выбирать для практической реализации перестановку с наибольшей размерностью и наибольшим объемом многогранника оптимальности.

Summary

It is proposed to use an optimality box of the job permutation π as a measure of the stability of an optimal permutation π for processing the set of jobs in the single-stage processing system respecting to variations of the processing times of the jobs. The computational experiments shown that it is reasonable for practical realization to use a permutation with the largest dimension and volume of the optimality box.