Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität „Otto von Guericke" Magdeburg 31 (1987) Heft 5
Sektion Mathematik - Direktor: Prof. Dr. sc. nat. H. Reichel
DK 658.512:658.513 Eingang: 16. 12. 1986

Zu einigen Nachbarschaftsgraphen für die Entwicklung geeigneter Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung eines speziellen Permutationsproblems

Frank Werner

Verschiedenartige Maschinenbelegungsprobleme führen auf Optimierungsaufgaben über der Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis m. Ein großer Teil dieser Probleme gehört zur Klasse NP-hard, so daß verstärkt Näherungsverfahren entwickelt werden. In der vorliegenden Arbeit werden spezielle Nachbarschaften zu dem betrachteten Permutationsproblem eingeführt und die zugehörigen Strukturgraphen auf ihre Eigenschaften untersucht.

1. Einführung

Eine große Anzahl von Reihenfolgeproblemen führt auf ein Permutationsproblem der Form

$$\min \{F(p) \mid p = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in P_m\}. \qquad (1)$$

Dabei bezeichne $P_m = P(M)$ die Menge aller Permutationen der Elemente der Menge $M = \{1, \dots, m\}$. Neben speziellen Zuordnungsproblemen sowie dem Rundreiseproblem gehören auch verschiedenartige Maschinenbelegungsprobleme zum Problemtyp (1). Ein großer Teil dieser Probleme gehört zur Klasse NP-hard. Daher existiert unter der Annahme $P \neq NP$ kein polynomialer Lösungsalgorithmus, und es werden für solche NP-hard Probleme verstärkt Näherungsverfahren entwickelt. Dabei finden sowohl Konstruktions- als auch Iterationsverfahren (Verbesserungsverfahren) Anwendung. Bei den Iterationsverfahren spielt die Wahl einer geeigneten Nachbarschaft $N(p)$, die vollständig oder teilweise (stochastisch) auf eine Lösungsverbesserung untersucht wird, eine bedeutende Rolle. In der vorliegenden Arbeit werden einige Nachbarschaftsstrukturen zum Permutationsproblem (1) auf graphentheoretischer Grundlage untersucht und einige wesentliche Eigenschaften abgeleitet. Im Abschnitt 2 werden die nachfolgend benötigten Grundlagen zu Permutationen und Graphen zusammengetragen. Danach werden im Abschnitt 3 einige Nachbarschaften betrachtet.

2. Einige Grundlagen zu Permutationen und Graphen

Eine Permutation vom Grade m bezeichnet eine eindeutige Abbildung von $M = \{1, 2, \dots, m\}$ auf M. Für die m Zuordnungen $1 \to p_1$, $2 \to p_2$, ..., $m \to p_m$ wird dabei die Schreibweise

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

verwendet. $\tilde{p} = (p_m, p_{m-1}, \dots, p_1)$ wird als Umkehrpermutation von p bezeichnet. Eine Permutation $p \in P_m$ heißt zyklisch mit der Zykluslänge r, falls sie durch Vertauschung ihrer Spalten auf die folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \dots p_{r-1} \; p_r \; p_{r+1} \dots p_m \\ p_2 \, p_3 \dots p_r \;\;\; p_1 \; p_{r+1} \dots p_m \end{pmatrix}$$

Für p wird nachfolgend auch die Zyklenschreibweise $z(p_1, p_2, \dots, p_r)$ verwendet, und $e(z) = r$ bezeichnet die Zykluslänge von z. Die Menge aller zyklischen Permutationen der Länge r von P_m wird mit P^r_{zm} bezeichnet. Ferner sei

$$P_{zm} = \bigcup_{r=2}^{m} P^r_{zm}.$$

Die Elemente von P^2_{zm} heißen Transpositionen. Weiterhin läßt sich jede Permutation $p \in P_m$ als Produkt elementfremder Zyklen schreiben (Hauptproduktdarstellung, vgl. [10]).

In der Menge P_m können verschiedene Abstandsmaße eingeführt werden.

1. Bezeichne $Po(p, i)$ die Position des Elementes i in $p \in P_m$ und sei

   $$Z(p^1, p^2) = \{(i, j) \in M^2 \mid Po(p^1, i) < Po(p^1, j) \wedge Po(p^2, i) > Po(p^2, j)\}.$$

   Dann bildet $d(p^1, p^2) = |Z(p^1, p^2)|$ den sogenannten Inversionsabstand.
2. Ein weiteres Abstandsmaß läßt sich über die Anzahl der Positionen, die in zwei Permutationen mit unterschiedlichen Elementen belegt sind, einführen, d. h.

   $$d(p^1, p^2) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} |p^1_i - p^2_i|.$$

3. Eine weitere Möglichkeit der Einführung eines Abstandsmaßes in P_m ergibt sich über die Betrachtung der maximalen Positionsdifferenz eines Elements in zwei Permutationen, d. h.

   $$d(p^1, p^2) = \max_{i=1,\dots,m} |Po(p^1, i) - Po(p^2, i)|.$$

4. Für das Rundreiseproblem läßt sich ein geeignetes Abstandsmaß auf der Basis der zwischen zwei Rundreisen auszutauschenden direkten Ortsverbindungen angeben. Seien 0 der Ausgangs- und Zielort und $\{1, \dots, m\}$ die Menge der zu besuchenden Orte und $V_i = \{(p^i_0, p^i_1), (p^i_1, p^i_2), \dots, (p^i_m, p^i_0)\}$ mit $p^i_0 = 0$ die Menge der direkten Verbindungen in der Rundreise $p^i = (p^i_1, \dots, p^i_m)$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $d(p^1, p^2) = |V_1 \setminus V_2|$ ein Abstandsmaß für das unsymmetrische Rundreiseproblem auf der Basis der auszutauschenden Kanten zwischen zwei Rundreisen (für das symmetrische Rundreiseproblem ist ein Abstand in analoger Weise definierbar).

P_m bildet mit allen angegebenen Abstandsmaßen jeweils einen metrischen Raum. Welcher Abstand bei einem speziellen Problem zugrundegelegt werden kann, hängt davon ab, inwieweit der betreffende Abstand ein natürliches „Maß“ für die Veränderung zwischen zwei Lösungen darstellt. Insofern ist Abstand 2 insbesondere für das Zuordnungsproblem sowie Abstand 4, wie erwähnt, für das Rundreiseproblem geeignet, und diese Abstände werden auch bei Iterationsverfahren für derartige Probleme implizit zugrundegelegt (k - Austauschverfahren, vgl. [4] bzw. [9]). Für viele Maschinenbelegungsprobleme erweist sich neben Abstand 3 das Abstandsmaß 1 als besonders geeignet und wird daher bei den weiteren Betrachtungen Berücksichtigung finden.

Nachfolgend bezeichne $I(p)$ die Menge aller Inversionen der Permutation p sowie

$$B_i(p) = \{(j, i) \in I(p)\} \quad i = 1(1)m$$

und $\quad C_i(p) = \{(i, k) \in I(p)\} \quad i = 1(1)m\,.$

Folglich gilt $\quad I(p) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i(p) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i(p)\,.$

Zu jeder Permutation $p \in P_m$ lassen sich zwei Inversionstabellen $b^p = (b_1^p,\ldots,b_m^p)$ und $c^p = (c_1^p,\ldots,c_m^p)$ mit $b_i^p = |B_i(p)|$ sowie $c_i^p = |C_i(p)|$ angeben, wobei $0 \leq b_i^p \leq m - i$ und $0 \leq c_i^p \leq i - 1$ gilt $(i = 1(1)m)$.

Theorem 1: Seien $p, \bar{p}, p' \in P_m$ mit $p' = \bar{p} \cdot p$. Dann gilt

$$d(p, p') = |I(\bar{p})|.$$

Beweis: Es reicht aus, zu zeigen, daß

$$(j, i) \in I(\bar{p}) \Leftrightarrow (p_i, p_j) \in Z(p, p').$$

1. Sei $(j, i) \in I(\bar{p})$. Dann existieren natürliche Zahlen k, l mit $1 \leq k < l \leq m$, so daß

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} \ldots & k & & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & \bar{p}_k = j & \ldots & \bar{p}_l = i & & \ldots \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

$$\bar{p}.p = \begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & i & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & i & \ldots & j & \ldots \\ \ldots & p_i & \ldots & p_j & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & p_j & \ldots & p_i & \ldots \end{pmatrix} = p'\,.$$

Wegen $k < l$ und $i < j$ erhält man daher $(p_i, p_j) \in Z(p, p')$.

2. Sei $(p_i, p_j) \in Z(p, p')$, d. h. $i < j$. Dann existieren natürliche Zahlen k, l mit $1 \leq k < l \leq m$, so daß

$$p' = \begin{pmatrix} \ldots & k & & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & p'_k = p_j & \ldots & p'_l = p_i & & \ldots \end{pmatrix}.$$

Folglich erhält man

$$p' \cdot p^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & p_j & \ldots & p_i & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & p_i & \ldots & p_j & \ldots \\ \ldots & i & \ldots & j & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & l & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & i & \ldots \end{pmatrix} = \bar{p}\,.$$

Wegen $i < j$ und $k < l$ folgt daher $(j, i) \in I(\bar{p})$.
Somit gilt $d(p, p') = |Z(p, p')| = |I(\bar{p})|$.

Zur Beschreibung verschiedener Nachbarschaftsstrukturen werden nachfolgend spezielle Graphen eingeführt. Wir verstehen unter einer Nachbarschaft N eine eindeutige Abbildung $N : P_m \rightarrow \text{pot}\, P_m$, wobei pot die Potenzmenge kennzeichnet. Sei $N(p)$ die Menge aller Nachbarn von p, dann heißt N symmetrisch, falls $p' \in N(p)$ genau dann gilt, wenn $p \in N(p')$. Andernfalls heißt N unsymmetrisch. Zur Beschreibung einer symmetrischen Nachbarschaft wird ein ungerichteter Graph $G = (P_m, U)$ eingeführt. Die Menge der Nachbarn von p bzgl. der durch G repräsentierten Struktur wird nachfolgend jeweils mit $N(p, G)$ bezeichnet. Dabei gilt $u = (p^1, p^2) \in U$, falls $p^2 \in N(p^1, G)$. Für $G = (P_m, U)$ werden folgende Definitionen getroffen.

Definition 1: Eine Folge von Knoten, die jeweils durch eine Kante in G verbunden sind, wird als Kette bezeichnet. Die Kette heißt einfach, falls in ihr nicht zweimal derselbe Knoten vorkommt. Unter der Kettenlänge wird die Anzahl der Kanten einer Kette verstanden. Ein Hamiltonkreis ist eine einfache Kette mit der Kettenlänge m!
Unter der Länge $l(p^1, p^2, G)$ zwischen den Knoten p^1 und p^2 in G wird die Länge der kürzesten Kette von p^1 nach p^2 verstanden. Der Durchmesser diam G eines zusammenhängenden Graphen G ist gegeben durch die größte Länge zwischen zwei Knoten von G.
Zwei Knoten p^1 und p^2 eines Graphen G sind einander ähnlich, wenn ein Automorphismus Φ existiert, der den Knoten p^1 in den Knoten p^2 überführt und dabei die Nachbarschaft erhält. G heißt knotensymmetrisch, wenn jedes Knotenpaar ähnlich ist. Für einen knotensymmetrischen Graphen sei $z_l(G) = |\{p^2 \in P_m \mid l(p^1, p^2, G) = l,$ $p^1 \in P_m$ beliebig$\}|$ (Wegen der Knotensymmetrie besitzt $z_l(G)$ für jedes $p^1 \in P_m$ den gleichen Wert). Der Graph G heißt n-fach verbunden, wenn n paarweise disjunkte Ketten zwischen jedem Knotenpaar des Graphen existieren. Der Gürtel eines Graphen G ist die Anzahl der Knoten in einem kürzesten Kreis in G. Der Umfang eines Graphen G ist die Anzahl der Knoten im längsten einfachen Kreis in G.
Eine analoge Definition läßt sich für einen gerichteten Graphen $\boldsymbol{G} = (P_m, \boldsymbol{U})$ angeben. Dabei ist jeweils Kette durch Weg und Kreis durch Zyklus zu ersetzen. Die nachfolgende Definition für einen Graphen G kann ebenfalls auf einen gerichteten Graphen $\boldsymbol{G}$ angewandt werden.

Definition 2: Sei $N_{\max}(G) = \max\limits_{p \in P_m} |N(p, G)|$. Falls $N_{\max}(G) = 0(m^k)$ gilt, dann wird $N(p, G)$ als Nachbarschaft k-ter Ordnung bezeichnet. Ist $N_{\max}(G)$ nicht polynominal beschränkt, dann heißt $N(p, G)$ exponentiell. Weiter ist $E(d, G)$ der mittlere Abstand $d(p, p')$ zwischen zwei in G benachbarten Knoten p und p', und entsprechend bezeichne $D^2(d, G)$ die mittlere quadratische Abweichung des eingeführten Abstandes $d(p, p')$ zwischen in G benachbarten Knoten.

3. Einige Nachbarschaftsgraphen für das betrachtete Permutationsproblem

Das einfachste und älteste Iterationsverfahren ist die blinde Suche (Monte-Carlo-Simulation), bei der im nächsten Schritt jede Lösung mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugt wird. Das zugehörige Graphenmodell ist ein vollständiger Graph $G^* = (P_m, U^*)$ mit Schlingen, d. h. $U^* = \{(p^1, p^2) \in P_m^2\}$. Die folgende Aussage basiert auf *Knuth* [7].

Theorem 2: Es gilt $E(d, G^*(m)) = \dfrac{m(m-1)}{4}$ und $D^2(d, G^*(m)) = \dfrac{m(2m+5)\,(m-1)}{72}$.

Beweis: Wegen Theorem 1 reicht es aus, zur Bestimmung von $E(d, G^*(m))$ die mittlere Anzahl von Inversionen einer Permutation zu betrachten. Sei $I(m, k) = |\{p \in P_m| I(p) = k\}|$, und die Permutation $\bar{p} \in P_{m-1}$ entstehe aus $p \in P_m$ durch Streichen des Elementes m. Wegen $I(p) = I(\bar{p}) \cup C_m(p)$ und $0 \leq c_m^p \leq m - 1$ erfüllt

$$g_m(z) = I(m, 0) + I(m, 1)\, z + I(m, 2)\, z^2 + \ldots$$

die Beziehung

$$\bar{g}_m(z) = (1 + z + z^2 + \ldots + z^{m-1})\, g_{m-1}(z). \tag{2}$$

Weiter sei dann $g_m(z) = \frac{\bar{g}_m(z)}{m!}$ die erzeugende Funktion für die Zufallsgröße G_m der Anzahl von Inversionen einer Permutation $p \in P_m$, und es gilt unter Berücksichtigung von (2)

$$g_m(z) = h_1(z)\, h_2(z) \ldots h_m(z),$$

wobei $h_k(z) = \frac{1 + z + \ldots + z^{k-1}}{k}$

die erzeugende Funktion der Zufallsgröße H_k für die Erzeugung einer nichtnegativen ganzen Zahl kleiner k ist.

Weiter erhält man

$$E(H_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{k-1}{2},$$

$$E(H_k^2) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)(2k-1)}{6} \quad \text{sowie}$$

$$D^2(H_k) = E(H_k^2) - [E(H_k)]^2 = \frac{k^2-1}{12} \ (1 \le k \le m)$$

und somit

$$E(d, G^*(m)) = E(G_m) = \sum_{i=1}^{m} E(H_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i-1}{2} = \frac{m\,(m-1)}{4}$$

bzw.

$$D^2(d, G^*(m)) = D^2(G_m) = \sum_{i=1}^{m} D^2(H_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i^2-1}{12} = \frac{m\,(2m+5)\,(m-1)}{72}.$$

Folgerung 1: Für $m \to \infty$ gilt $E(d, G^*(m)) \approx \frac{m^2}{4}$ und

$$D^2(d, G^*(m)) \approx \frac{m^3}{36}.$$

Es zeigt sich, daß bei der blinden Suche der mittlere Abstand zwischen der bisherigen besten Lösung und der im nächsten Schritt zu erzeugenden Lösung sehr groß ist, wobei die bisher erreichte Näherungslösung nicht zur Erzeugung weiterer Lösungen ausgenutzt wird. Es werden daher solche Nachbarschaften $G(m)$ gesucht, bei denen $E(d, G(m))$ deutlich kleiner als $E(d, G^*(m))$ ist, aber trotzdem $|N(p, G(m))|$, $E(d, G(m))$ und $D^2(d, G(m))$ noch hinreichend groß sind, um eine frühzeitige Stagnation in einem lokalen Optimum zu verhindern.

In [13] werden der Graph $G_B(m) = (P_m, U_B)$ der Basistransformationen mit

$$U_B = \{(p^1, p^2) \in P_m^2 \mid p^2 = p \cdot p^1,\ p \in P_{zm}\} \tag{3}$$

sowie verschiedene weitere Untergraphen von $G_B(m)$, bei denen die Zyklenlänge von p in (3) beschränkt ist, betrachtet. Nachfolgend werden weitere Nachbarschaftsgraphen auf ihre Eignung für die Entwicklung iterativer Verfahren zur näherungsweisen Lösung des Problems (1) untersucht.

Wir betrachten jetzt zwei unsymmetrische Nachbarschaften, die durch die gerichteten Graphen $\mathbf{G}^{LS}(m)$ bzw. $\mathbf{G}^{RS}(m)$ beschrieben werden. In $\boxed{\mathbf{G}^{LS}(m)} = (P_m, \mathbf{U}^{LS})$ gilt $(p^1, p^2) \in \mathbf{U}^{LS}$ genau dann, wenn

$$p^2 = z(i-j, i, i-1, \ldots, i-j+1)\, p^1$$

$(2 \le i \le m,\ j \le i-1)$, d. h. p^2 entsteht durch Verschiebung des i-ten Elements in p^1 um j Positionen nach links (als „left shift" oder (L, i, j)-Verschiebung in p^1 bezeichnet). Die dem Graphen $\mathbf{G}^{LS}(m)$ zugrundeliegende Nachbarschaft findet zum Beispiel bei einem Iterationsverfahren von *Krone/Steiglitz* (vgl. [8]) Anwendung. $\mathbf{G}^{LS}(m)$ ist zusammenhängend und hamiltonsch, da der Graph $G_V(m)$ der Nachbarvertauschungen diese beiden Eigenschaften besitzt und jede Nachbarvertauschung eine spezielle Linksverschiebung darstellt (vgl. z. B. [11]). Mit analoger Begründung gilt diese Aussage auch für die im weiteren betrachteten Nachbarschaftsgraphen.

Bemerkung 1: Seien $p, p^1, p^2 \in P_m$ mit $p^2 = p \cdot p^1$. Dann entsteht p^2 genau dann durch eine (L, i, j)-Verschiebung aus p^1, wenn in der Inversionstabelle $c^p\ c_i^p = j$ sowie $c_k^p = 0$ für alle $k \in M \setminus \{i\}$ gilt. Daher ist

$$d(p^1, p^2) = |I(p)| = j.$$

Lemma 1: $\mathbf{G}^{LS}(m)$ ist knotensymmetrisch.

Beweis: Wir betrachten den Automorphismus $\Phi(p) = p \cdot p'$, wobei $p' \in P_m$ beliebig ist. Seien $p^1, p^2 \in P_m$ mit $(p^1, p^2) \in \mathbf{U}^{LS}$, d. h. $p^2 = \bar{p} \cdot p^1$ mit $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} c_i^{\bar{p}} = 1$. Folglich gilt $p^2 \cdot p' = \bar{p}(p^1 \cdot p')$ und somit erhält man $(p^1 \cdot p', p^2 \cdot p') \in \mathbf{U}^{LS}$ genau dann, wenn $(p^1, p^2) \in \mathbf{U}^{LS}$.

Für die weiteren nachfolgend eingeführten Nachbarschaftsgraphen ist die Knotensymmetrie jeweils analog zu beweisen.

Lemma 2: Es gilt $|N(p, \mathbf{G}^{LS}(m))| = \frac{m}{2}(m-1)$ für $p \in P_m$ und $m \ge 2$.

Beweis: Sei $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in P_m$. Bezüglich des Elements p_i können insgesamt $i - 1$ (L, i, j)-Verschiebungen ausgeführt werden $(2 \le i \le m,\ 1 \le j \le i-1)$. Folglich gilt

$$\left|N\left(p, \mathbf{G}^{LS}(m)\right)\right| = \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m}{2}(m-1).$$

Theorem 3: Es gilt diam $\mathbf{G}^{LS}(m) = m - 1$ für $m \ge 2$.

Beweis: Seien $p, p^1 \in P_m$ beliebig und $p^2 = p \cdot p^1$. Wir betrachten die Inversionstabelle $c^p = (c_1^p, \ldots, c_m^p)$. Dann gilt $l(p^1, p^2, \mathbf{G}^{LS}) = l$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} c_i^p = l \quad \text{gilt}.$$

Wegen $c_1^p = 0$ ergibt sich $l(p^1, p^2, \mathbf{G}^{LS}) \le m - 1$, und für $c_k^p \neq 0$ für $2 \le k \le m$ wird das Gleichheitszeichen angenommen.

Theorem 4: In $\mathbf{G}^{LS}(m)$ gilt folgende Rekursionsbeziehung:

$$z_l\left(\mathbf{G}^{LS}(m)\right) = z_l\left(\mathbf{G}^{LS}(m-1)\right) + (m-1)\, z_{l-1}\left(\mathbf{G}^{LS}(m-1)\right)$$

mit $0 < l \le$ diam $\mathbf{G}^{LS}(m) = m - 1$ für $m \ge 2$ sowie $z_0(\mathbf{G}^{LS}(m)) = 1$ für $m \ge 1$.

Beweis: Offensichtlich gilt $z_0(\mathbf{G}^{LS}(m)) = 1$ für $m \ge 1$. Seien $p, p^1 \in P_m$ beliebig mit $p \neq p^e = (1, 2, \ldots, m)$ und $p^2 = p \cdot p^1$. Dann gilt $l(p^1, p^2, \mathbf{G}^{LS}) = l$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn} c_i^p = l. \tag{4}$$

Folglich ergibt sich $z_l(\mathbf{G}^{LS}(m))$ aus der Anzahl der Permutationen $p \in P_m$ mit (4). Die beiden folgenden Fälle sind möglich:

Fall 1: Es gilt $c_m^p = 0$ und somit $\sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{sgn} c_i^p = l$. In diesem Fall gibt es $z_l(\mathbf{G}^{LS}(m-1))$ Permutationen p, so daß $l(p^1, p^2, \mathbf{G}^{LS}) = l$ und $c_m^p = 0$.

Fall 2: Es gilt $c_m^p > 0$ und somit $\sum_{i=0}^{m-1} \operatorname{sgn} c_i^p = l - 1$.

Sei $\bar{p} \in P_{m-1}$ die Permutation, die aus p durch Streichen des Elements m entsteht. Da in der Inversionstabelle c_p die Fälle $c_m^p = j$ mit $1 \leq j \leq m-1$ möglich sind, werden jeweils $m-1$ Permutationen p mit (4) auf dieselbe Permutation $\bar{p}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m-1} \operatorname{sgn} c_i^{\bar{p}} = l - 1$$

abgebildet. Somit gibt es $(m-1) \cdot z_{l-1}$ $(\boldsymbol{G}^{LS}(m-1))$ Permutationen p, so daß $l(p^1, p^2, \boldsymbol{G}^{LS}) = l$ und $c_m^p > 0$.

Theorem 5: Es gilt $E(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)) = \frac{m+1}{3}$ und $D^2(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)) = \frac{(m+1)(m-2)}{18}$ für $m \geq 2$.

Beweis: Unter Berücksichtigung der im Beweis von Lemma 2 angegebenen Möglichkeiten für (L, i, j)-Verschiebungen in einer Permutation $p \in P_m$ sowie Bemerkung 1 erhält man

$$E\left(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right) = \frac{1}{\left|N\left(p, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right)\right|} \sum_{i=1}^{m-1} i\,(m-i)$$

$$= \frac{1}{\left|N\left(p, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right)\right|} \frac{m\,(m^2-1)}{6} = \frac{m+1}{3}.$$

Wegen

$$E\left(d^2, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right) = \frac{1}{\left|N\left(p, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right)\right|} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m-1} i^2\,(m-i) = \frac{m\,(m+1)}{6}$$

ergibt sich

$$D^2\left(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right) = E\left(d^2, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right) - \left[E\left(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right)\right]^2$$

$$= \frac{m(m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{3}\right)^2 = \frac{(m+1)\,(m-2)}{18}.$$

Folgerung 2: Für $m \to \infty$ erhält man $E(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)) \approx \frac{m}{3}$ und

$$D^2\left(d, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right) \approx \frac{m^2}{18}.$$

Analoge Aussagen lassen sich für den Graphen $\boldsymbol{G}^{RS}(m) = (P_m, \boldsymbol{U}^{RS})$ ableiten, wobei $(p^1, p^2) \in \boldsymbol{U}^{LS}$ genau dann gilt, wenn

$$p^2 = z(i, i+1, i+2, \ldots, i+j)\, p^1$$

$(1 \leq i \leq m-1, j \leq m-i)$, d. h. p^2 entsteht durch Verschiebung des i-ten Elements in p^1 um j Positionen nach rechts (als „right shift" bzw. (R, i, j)-Verschiebung in p^1 bezeichnet).

Bemerkung 2: Seien $p, p^1, p^2 \in P_m$ mit $p^2 = p \cdot p^1$. Dann entsteht p^2 genau dann durch eine (R, i, j)-Verschiebung aus p^1, wenn in der Inversionstabelle b^p $b_i^p = j$ sowie $b_k^p = 0$ für alle $k \in M \setminus \{i\}$ gilt. Daher ist

$$d(p^1, p^2) = |I(p)| = j.$$

Wenn die den Graphen $\boldsymbol{G}^{LS}(m)$ bzw. $\boldsymbol{G}^{RS}(m)$ zugrundeliegenden Nachbarschaften zu einer symmetrischen Nachbarschaft erweitert werden, führt dies auf den ungerichteten Graphen $\boxed{G^S(m)} = (P_m, U^S)$ mit $U^S = \{(p^1, p^2) \in P_m^2 \mid (p^1, p^2) \in \boldsymbol{U}^{LS} \vee (p^1, p^2) \in \boldsymbol{U}^{RS}\}$.

Die dem Graphen $G^S(m)$ zugrundeliegende Erzeugung benachbarter Permutationen wird unter anderem in einem aus Prinzipien der biologischen Evolution abgeleiteten Suchverfahren benutzt (vgl. [12]).

Theorem 6: $G^S(m)$ hat den Gürtel 3 für $m \geq 3$.

Beweis: Seien $p^1 = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$, $p^2 = (p_2, p_1, p_3, \ldots, p_m)$, $p^3 = (p_2, p_3, p_1, \ldots, p_m) \in P_m$. Dann bildet p^1, p^2, p^3, p^1 einen Kreis der Länge 3 in $G^S(m)$.

Lemma 3: Es gilt $|N(p, G^S(m))| = (m-1)^2$ für $m \geq 2$.

Beweis: Sei $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in P_m$. Neben den im Beweis von Lemma 2 angegebenen (L, i, j)-Verschiebungen in p können bezüglich des Elements p_i insgesamt $m - i$ (R, i, j)-Verschiebungen ausgeführt werden $(1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq m-i)$. Da bei Realisierung einer $(R, i, 1)$- bzw. $(L, i+1, 1)$-Verschiebung jeweils dieselben Permutationen erzeugt werden, erhält man

$$|N(p, G^S(m))| = \left|N\left(p, \boldsymbol{G}^{LS}(m)\right)\right| + \left|N\left(p, \boldsymbol{G}^{RS}(m)\right)\right|$$

$$-(m-1) = 2\sum_{i=1}^{m-1} i - (m-1) = (m-1)^2.$$

Theorem 7: Es gilt $\operatorname{diam} G^S(m) = m-1$ für $m \geq 2$.

Beweis: Wegen $\operatorname{diam} \boldsymbol{G}^{LS}(m) = m-1$ folgt $\operatorname{diam} G^S(m) \leq m-1$. Sei $\tilde{p} \in P_m$ die Umkehrpermutation von p. Es wird nachfolgend gezeigt, daß $l(p, \tilde{p}, G^S) = m-1$ gilt. Für $m = 2$ bzw. $m = 3$ gilt offenbar die Behauptung. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für $m = k$ und zeigen, daß sie dann auch für $m = k+1$ gilt. Sei $p^1 = (p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}) \in P_{k-1}$. Ferner bezeichne $\tilde{p}$ die Umkehrpermutation von $p = (p_1, \ldots, p_k) \in P(K)$ mit $K = \{1, \ldots, k+1\} \setminus \{p_{k+1}\}$. Außerdem sei $\tilde{p}^1 = (p_{k+1}, \tilde{p})$. Wegen der Induktionvoraussetzung gilt $l(p, \tilde{p}, G^S) = k-1$. Angenommen, es gilt $l(p^1, \tilde{p}^1, G^S) < k$, d. h. das Element p_{k+1} wird nicht durch eine Linksverschiebung auf Position 1 in $\tilde{p}^1$ angeordnet. Dann müssen alle Elemente der Menge K durch Rechtsverschiebungen auf ihre Positionen in $\tilde{p}^1$ überführt werden im Widerspruch zur Annahme $l(p^1, \tilde{p}^1, G^S) < k$.
Folglich gilt $l(p^1, \tilde{p}^1, G^S) = k$.

Bemerkung 3: Seien $p^1 = (p_1, \ldots, p_m)$, $p^2 \in P_m$ und gelte $Po(p^2, p_m) > 1$, dann ist $l(p^1, p^2, G^S) < m-1$. Somit gilt stets $z_{m-1}(G^S(m)) = 1$, da nur für die Umkehrpermutation $\tilde{p}^1 \in P_m$ von p^1 $l(p^1, \tilde{p}^1, G^S) = m-1$ gilt, während aus Theorem 4 folgt, daß $z_{m-1}(\boldsymbol{G}^{LS}(m)) = (m-1)!$ gilt.

Theorem 8: Es gilt $E(d, G^S(m)) = \frac{m^2+m-3}{3(m-1)}$ und

$$D^2(d, G^S(m)) = \frac{m\,(m^3 - 4m^2 + 7m - 6)}{18\,(m-1)^2} \quad \text{für} \quad m \geq 2.$$

Beweis: Unter Berücksichtigung der in den Beweisen von Lemma 2 und 3 angegebenen Möglichkeiten für (L, i, j)- bzw. (R, i, j)-Verschiebungen in einer Permutation $p \in P_m$ sowie Bemerkungen 1 und 2 erhält man

$$E(d, G^S(m)) = \frac{1}{|N(p, G^S(m))|} \left[2 \sum_{i=1}^{m-1} i\,(m-i) - (m-1)\right]$$

$$= \frac{1}{|N(p, G^S(m))|} \left[(m^2-1)\,(m-1) - \frac{m\,(m-1)\,(2m-1)}{3}\right]$$

$$= \frac{m^2+m-3}{3\,(m-1)}.$$

Wegen

$$E(d^2, G^S(m)) = \frac{1}{|N(p, G^S(m))|} \left[2 \sum_{i=1}^{m-1} i^2\,(m-i) - (m-1)\right]$$

$$= \frac{1}{|N(p, G^S(m))|} \times$$

$$\times \left[\frac{m^2\,(m-1)\,(2m-1)}{3} - \frac{(m-1)^2 m^2}{2} - (m-1)\right]$$

$$= \frac{m^3+m^2-6}{6\,(m-1)}$$

ergibt sich

$$D^2(d, G^S(m)) = E(d^2, G^S(m)) - [E(d, G^S(m)]^2$$
$$= \frac{m\,(m^3 - 4m^2 + 7m - 6)}{18\,(m-1)^2}$$

Folgerung 3: Für $m \to \infty$ ist $E(d, G^S(m)) \approx \frac{m}{3}$ und D^2 $(d, G^S(m)) \approx \frac{m^2}{18}$.

Durch Hinzunahme weiterer Kanten gegenüber dem Verschiebungsgraph $G^S(m)$ entsteht der ungerichtete Blockvertauschungsgraph $G^{BL}(m) = (P_m, U^{BL})$ mit $U^{BL} = \{(p^1, p^2) \in P_m^2 \mid p^1 = (p_1, \ldots, p_{i-1}, \; p_i, \ldots, p_j, \; p_{j+1}, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_m), \; p^2 = (p_1, \ldots, p_{i-1}, \; p_{j+1}, \ldots, p_k, p_i, \ldots, p_j, p_{k+1}, \ldots, p_m)\}$, d. h. es werden zwei benachbarte Blöcke $B_1 = \{p_i, \ldots, p_j\}$ und $B_2 = \{p_{j+1}, \ldots, p_k\}$ in p^1 vertauscht. Bezeichne $f = Po(p^1, p_i) = i$ die Position des ersten an der Blockvertauschung beteiligten Elements. Dann kann eine (B_1, B_2)-Blockvertauschung in p^1 auch durch Angabe von f, $|B_1|$ und $|B_2|$ beschrieben werden. Offensichtlich gilt $U^S \subseteq U^{BL}$ (für $|B_1| = 1$ bzw. $|B_2| = 1$ wird genau eine (R, i, j)- bzw. (L, i, j)-Verschiebung ausgeführt), und somit hat $G^{BL}(m)$ den Gürtel 3 für $m \geq 3$.

Lemma 4: Es gilt $|N(p, G^{BL}(m))| = \frac{m\,(m^2-1)}{6}$ für $p \in P_m$ und $m \geq 2$.

Beweis: Sei $p \in P_m$ beliebig. Dann gibt es folgende Möglichkeiten für (B_1, B_2)-Blockvertauschungen in p: Zunächst gilt stets $1 \leq |B_1| = i \leq m-1$. Dann gibt es jeweils

$m - i$ Möglichkeiten mit $|B_2| = 1$ $(f = 1, \ldots, m-i)$,
$m - i - 1$ Möglichkeiten mit $|B_2| = 2$ $(f = 1, \ldots, m - i - 1)$,
. . . . sowie
1 Möglichkeit mit $|B_2| = m - i$ $(f = 1)$.

Folglich erhalt man

$$|N\,(p, G^{BL}(m))| = \sum_{i=1}^{m-1} i\,(m-i) = m \sum_{i=1}^{m-1} i - \sum_{i=1}^{m-1} i^2$$
$$= \frac{m\,(m^2-1)}{6}.$$

Somit ist $N(p, G^{BL}(m))$ eine Nachbarschaft 3. Ordnung.

Bemerkung 4: Sei $p^1 \in P_m$ und p^2 die aus p^1 durch eine (B_1, B_2)-Blockvertauschung mit $|B_1| = i$ und $|B_2| = j$ entstandene Permutation $(i + j \leq m)$. Dann erhält man wegen $Z(p^1, p^2) = B_1 \times B_2$ sofort $d(p^1, p^2) = i \cdot j$.

Lemma 5: Es gilt $\max \{d(p^1, p^2) \mid (p^1, p^2) \in U^{BL}\} = \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor$ [1]).

Beweis: Sei p^2 die aus p^1 durch eine (B_1, B_2)-Blockvertauschung mit $|B_1| = i$ und $|B_2| = j$ entstandene Permutation. Offensichtlich wird der maximale Abstand für $i + j = m$ angenommen. Wegen Bemerkung 4 gilt $d(p^1, p^2) = i(m - i)$, und man erhält als Optimallösung ohne die Ganzzahligkeitsforderung

$$\bar{i} = \bar{j} = \frac{m}{2} \quad \text{mit} \quad d_{\max} = \frac{m^2}{4}.$$

Seien $i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ und $j = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Dann erhält man

$$d_{\max} = \begin{cases} \frac{m^2}{4} & \text{für} \quad m \equiv 0 \bmod 2 \\ \frac{m^2}{4} - \frac{1}{4} = \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor & \text{für} \quad m \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

[1]/ $\lfloor x \rfloor$ bezeichne die größe ganze Zahl q mit $q \leq x$ und $\lceil x \rceil$ bezeichne die kleinste ganze Zahl q mit $q \geq x$.

Theorem 8: Es gilt $E(d, G^{BL}(m)) = \frac{3m^2 + 15m + 18}{60}$ und

$$D^2\,(d, G^{BL}(m)) = \frac{19m^4 + 70m^3 - 37m^2 - 280m - 156}{8400}$$

für $m \geq 2$.

Beweis: Unter Berücksichtigung der im Beweis von Lemma 4 angegebenen möglichen (B_1, B_2)-Blockvertauschungen sowie Bemerkung 4 erhält man

$$E\,(d, G^{BL}(m)) = \frac{1}{|N\,(p, G^{BL}(m))|} \sum_{i=1}^{m-1} i \sum_{j=1}^{m-i} j\,(m - i - j + 1)$$
$$= \frac{1}{6\,|N\,(p, G^{BL}(m))|} \Bigg[-\sum_{i=1}^{m-1} i^4 + 3\,(m+1) \sum_{i=1}^{m-1} i^3$$
$$- (3m^2 + 6m + 2) \sum_{i=1}^{m-1} i^2 + (m^3 + 3m^2 + 2m) \sum_{i=1}^{m-1} i \Bigg]$$
$$= \frac{3m^2 + 15m + 18}{60}.$$

Wegen

$$E\,(d^2, G^{BL}(m)) = \frac{1}{|N\,(p, G^{BL}(m))|} \sum_{i=1}^{m-1} i^2 \sum_{j=1}^{m-i} j^2\,(m - i - j + 1)$$
$$= \frac{1}{12\,|N\,(p, G^{BL}(m))|} \Bigg[\sum_{i=1}^{m-1} i^6 - (4m + 4) \sum_{i=1}^{m-1} i^5$$
$$+ (6m^2 + 12m + 5) \sum_{i=1}^{m-1} i^4 - (4m^3 + 12m^2 + 10m + 2) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{m-1} i^3 + (m^4 + 4m^3 + 5m^2 + m) \sum_{i=1}^{m-1} i^2 \Bigg]$$
$$= \frac{2m^4 + 14m^3 + 37m^2 + 49m + 30}{420}$$

ergibt sich

$$D^2\,(d, G^{BL}(m)) = E\,(d^2, G^{BL}(m)) - [E\,(d, G^{BL}(m))]^2$$
$$= \frac{19m^4 + 70m^3 - 37m^2 - 280m - 156}{8400}.$$

Folgerung 4: Für $m \to \infty$ erhält man $E(d, G^{BL}(m)) \approx \frac{m^2}{20}$ und

$$D^2\,(d, G^{BL}(m)) \approx \frac{19m^4}{8400}.$$

Bemerkung 5: Wegen Folgerung 1 erhält man für große m $E(d, G^{BL}(m)) \approx \frac{1}{5} E(d, G^*(m))$. Da die unbefriedigenden Resultate bei der Monte-Carlo-Simulation (vgl. [12]) auf die unzureichende Berücksichtigung einer geeigneten Nachbarschaft der im bisherigen Suchverlauf erhaltenen besten Lösung zurückzuführen sind (die Näherungslösung wird nicht zur weiteren Erzeugung von Permutationen ausgenutzt), ist es somit kaum empfehlenswert, Nachbarschaften mit einem wesentlich größeren mittleren Abstand als $E(d, G^{BL}(m))$ zu betrachten!

Bemerkung 6: Wegen $U^{BL} \supseteq U^S$ gilt $\operatorname{diam} G^{BL}(m) \leq \operatorname{diam} G^S(m) = m - 1$. Für $2 \leq m \leq 4$ gilt auch tatsächlich $\operatorname{diam} G^{BL}(m) = m - 1$. Da andererseits für $m = 5$ aus $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ die Umkehrpermutation $\tilde{p}$ durch 3 Blockvertauschungen zu erreichen ist $(p^1 = (p_3, p_4, p_1, p_2, p_5)$, $p^2 = (p_3, p_2, p_5, p_4, p_1)$, $p^3 = \tilde{p})$, erhält man unter Beachtung von Bemerkung 3 $\operatorname{diam} G^{BL}(m) < m - 1$ für $m \geq 5$.

Für $m \geq 4$ ist $G^{BL}(m)$ offensichtlich kein Untergraph des Graphen $G^B(m)$ der Basistransformationen. Wie das folgende Lemma zeigt, sind die Nachbarschaften $N(p, G^{BL}$

$(m))$ und $N(p, G_B(m))$ wesentlich voneinander verschieden.

Lemma 6: Sei $N = |N(p, G^{BL}(m)) \;/\; N(p, G/(m))|$. Dann gilt

$$N = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{\substack{j=2 \text{ mit} \\ \text{g. g. T.}(i,j) \neq 1}}^{m-i} (m - i - j + 1)\,.$$

Beweis: Die Permutation $p' \in P_m$ entstehe durch eine (B_1, B_2)-Blockvertauschung mit $|B_1| = i$ und $|B_2| = j$ aus $p \in P_m$.

Dann existiert ein $\bar{p} \in P_m$, so daß $p' = \bar{p} \cdot p$, und $\bar{p}$ hat die Gestalt $f + k \to f + (k + i) \bmod (i + j)$ (5)
für $0 \leq k \leq i + j - 1$ (die restlichen Elemente sind Fixpunkte).

Es wird gezeigt, daß $\bar{p} \in P_{zm}$ genau dann gilt, wenn g. g. *T.* $(i, j) = 1$.

Wir betrachten den Zyklus c in der Hauptproduktdarstellung von p, der das Element f enthält. Sei $e(c) = s(\leq i + j)$. Wegen (5) ist s die kleinste positive ganze Zahl mit $s \cdot i = 0 \bmod (i + j)$, d. h. es existiert ein $a \leq j$ mit $s \cdot i = a(i + j)$. Dabei ist g. g. T. $(i, j) = 1$ genau dann wenn $s = i + j$ und somit $\bar{p} \in P_{zm}$ gilt. Unter Beachtung der im Beweis von Lemma 4 angegebenen Möglichkeiten für (B_1, B_2)-Blockvertauschungen erhält man

$$\sum_{i=2}^{m-1} \sum_{\substack{j=2 \text{ mit} \\ \text{g. g. T.}(i,j) \neq 1}}^{m-i} (m - i - j + 1)\,.$$

Aus Lemma 6 erhält man, daß zum Beispiel für $m = 10, 20$ bzw. 40 bereits 23, 03; 28, 27 bzw. 35 % der Nachbarn von p in $G^{BL}(m)$ nicht in $N(p, G_B(m))$ enthalten sind.

Für Iterationsverfahren bedeutsame Untergraphen von $G^{BL}(m)$ entstehen, wenn nur spezielle Blockvertauschungen mit $|B_1| + |B_2| \leq k$ und $2 \leq k \leq m$ in einer Permutation p zugelassen werden. Diese Graphen werden mit $G_k^{BL}(m)$ bezeichnet. Der Graph $G_2^{BL}(m)$ entspricht dem Nachbarvertauschungsgraphen $G_V(m)$ (vgl. [11]). Für $k = 3$ und $k = 4$ erhält man:

$$k = 3 - |N(p, G_3^{BL}(m))| = 3m - 5\,,$$

$$E(d, G_3^{BL}(m)) = \frac{5m - 9}{3m - 5}\,,$$

$$D^2(d, G_3^{BL}(m)) = \frac{2m^2 - 6m + 4}{(3m - 5)^2}\,;$$

$$k = 4 - |N(p, G_4^{BL}(m))| = 6m - 14\,.$$

$$E(d, G_4^{BL}(m)) = \frac{15m - 39}{6m - 14}\,,$$

$$D^2(d, G_4^{BL}(m)) = \frac{33m^2 - 146m + 145}{(6m - 14)^2}\,.$$

Diese Nachbarschaftsstrukturen erscheinen als günstig, wenn damit zu rechnen ist, daß häufig zwischen der mit einem Konstruktionsverfahren ermittelten Ausgangslösung sowie der Optimallösung ein geringer Abstand besteht.

Abschließend betrachten wir die durch die ungerichteten k-Abstandsgraphen $G^k(m) = (P_m, U^k)$ beschriebenen Nachbarschaften.

Dabei sei $U^k = \{(p^1, p^2) \in P_m^2 \mid 1 \leq d(p^1, p^2) \leq k\}$, wobei für das betrachtete Abstandsmaß $\max \{d(p^1, p^2) \mid p^1, p^2 \in P_m\} = \binom{m}{2}$ (6)
und daher $k \leq \binom{m}{2}$ gilt. Für $k = 1$ entspricht $G^k(m)$ dem in [11] beschriebenen Graph der Nachbarvertauschungen $G_V(m)$.

Lemma 7: Für $m \geq 4$ und $k \geq 2$ ist $G^k(m)$ kein Untergraph des Graphen $G_B(m)$ der Basistransformationen.

Beweis: Seien $p^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_m)$, $p^2 = (p_2, p_1, p_4, p_3, \ldots, p_m)$. Wegen $d(p^1, p^2) = 2$ ist $(p^1, p^2) \in U^k$. Andererseits gilt $p^2 = z(1, 2) \cdot z(3, 4) \cdot p$ und somit $(p^1, p^2) \notin U_B$.

Theorem 9: $G^k(m)$ hat den Gürtel
6 für $m = 3$ und $k = 1$,
4 für $m > 3$ und $k = 1$ sowie
3 für $m \geq 3$ und $2 \leq k \leq \binom{m}{2}$.

Beweis: Sei $k = 1$. Für $m = 3$ ist $p^1 = (1, 2, 3)$, $p^2 = (1, 3, 2)$, $p^3 = (3, 1, 2)$, $p^4 = (3, 2, 1)$, $p^5 = (2, 3, 1)$, $p^6 = (2, 1, 3)$, p^1 der einzige Kreis in $G^1(m)$. Für $m > 3$ ist in $G^1(m)$ offensichtlich kein Kreis der Länge kleiner als 4 enthalten. Seien $p^1 = (p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_m)$, $p^2 = (p_2, p_1, p_3, p_4, \ldots, p_m)$, $p^3 = (p_2, p_1, p_4, p_3, \ldots, p_m)$ und $p^4 = (p_1, p_2, p_4, p_3, \ldots, p_m)$. Dann bildet p^1, p^2, p^3, p^4, p^1 einen Kreis der Länge 4 in $G^1(m)$. Seien $1 < k \leq \binom{m}{2}$ und $p^1 = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m)$, $p^2 = (p_2, p_1, p_3, \ldots, p_m)$ und $p^3 = (p_2, p_3, p_1, \ldots, p_m)$. Dann bildet p^1, p^2, p^3, p^1 einen Kreis der Länge 3 in $G^k(m)$.

Theorem 10: Es gilt $\operatorname{diam} G^k(m) = \left\lceil \frac{\binom{m}{2}}{k} \right\rceil$ für $m \geq 2$ und $k \leq \binom{m}{2}$.

Beweis: Seien $p, p' \in P_m$ mit $d(p, p') = l$. Dann existiert eine Darstellung

$$p' = z(j_l - 1, j_l)\, z(j_{l-1}, j_{l-1}) \ldots z(j_2 - 1, j_2)\, z(j_1 - 1, j_1)\, p,), \tag{7}$$

wobei $z(j_k - 1, j_k)$ Standardtranspositionen sind. (Es sei bemerkt, daß die Reihenfolge der Standardtranspositionen in (7) i. a. nicht eindeutig bestimmt sein muß!)

Seien $p^t = z(j_{tk} - 1, j_{tk}) \ldots z(j_{(t-1)k+1} - 1, j_{(t-1)k+1})$

$$i = 1, \ldots, t := \left\lfloor \frac{l}{k} \right\rfloor$$

$p^h = z(j_l - 1, j_l) \ldots z(j_{tk+1} - 1, j_{tk+1})$ falls $l \not\equiv 0 \bmod k$,

d. h. wir erhalten $p' = p^h \cdot p^{h-1} \cdot \ldots\; p^2 \cdot p^1 \cdot p$ mit $h = \lceil \frac{l}{k} \rceil$. Wegen (6) folgt somit $\operatorname{diam} G^k(m) = \left\lceil \frac{\binom{m}{2}}{k} \right\rceil$.

Folgerung 5: Aus dem Beweis von Theorem 10 erhält man

$$z_l(G^k(m)) = \sum_{i=(l-1)k+1}^{l \cdot k} z_i(G_V(m))\,,$$

wobei $2 \leq k \leq \binom{m}{2}$, $1 \leq l \leq \operatorname{diam} G^k(m)$, $z_0(G^k(m)) = 1$ und $z_i(G_V(m)) = 0$ für $i > \operatorname{diam} G_V(m) = \binom{m}{2}$ gilt und $m \geq 2$.

Tabelle für $z_l(G^2(m))$

$l \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	4	8	13	19	26	34
2	0	0	1	11	35	78	147	250
3	0	0	0	4	42	161	428	945
4	0	0	0	0	24	202	814	2376
5	0	0	0	0	5	161	1104	4433
6	0	0	0	0	0	78	1104	6467
7	0	0	0	0	0	19	814	7572

Seien $p, p^1 \in P_m$ beliebig und $p^2 = p \cdot p^1$. Bezüglich des Graphen $G_V(m)$ von Nachbarvertauschungen erhält man unter Beachtung von Theorem 1

$l(p^1, p^2, G_V) = d(p^1, p^2) = |I(p)|$

und somit für $l \leq m$ (vgl. [7])

$$z_l(G_V(m)) = \binom{m+l-2}{l} - \binom{m+l-3}{l-2} + \binom{m+l-6}{l-5} + \binom{m+l-8}{l-7} - \dots$$
$$+ (-1)^j \left(\binom{m+l-u_j-1}{l-u_j} + \binom{m+l-u_j-j-1}{l-u_j-j}\right) + \dots, \qquad (8)$$

wobei $u_j = (3j^2 - j)/2$ die sogenannten Pentagonalzahlen darstellen. Da für Methoden der lokalen Suche im wesentlichen nur Nachbarschaften bis etwa zur 3. Ordnung in Frage kommen dürften, sind bei den Graphen $G^k(m)$ die Fälle $k = 1, 2, 3$ von besonderer Bedeutung, denn unter Beachtung von Folgerung 5 und (8) erhält man

$$|N(p, G^1(m))| = m - 1$$

$$|N(p, G^2(m))| = \frac{m^2 - m - 4}{2} \quad \text{für} \quad m \geq 2 \quad \text{sowie}$$

$$|N(p, G^3(m))| = \frac{m^3 + 3m^2 - 4m - 12}{6} \quad \text{für} \quad m \geq 3.$$

Bei stochastischen Verfahren (die Nachbarschaft wird nicht vollständig durchsucht!), können jedoch durchaus auch Nachbarschaftsgraphen $G^k(m)$ mit $k > 3$ Berücksichtigung finden.

4. Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurden einige Nachbarschaftsstrukturen zum diskreten Optimierungsproblem (1) untersucht, die bei der Entwicklung von Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung von Problemen des betrachteten Typs Anwendung finden könnten.
Mit den Graphen $G^{LS}(m)$ bzw. $G^{RS}(m)$ wurden dabei auch zwei unsymmetrische Nachbarschaften betrachtet. Außerdem wurden zwei Nachbarschaften untersucht, bei denen die zugehörigen Graphen $G^{BL}(m)$ sowie $G^k(m)$ keine Untergraphen des Graphen $G_B(m)$ der Basistransformationen sind. Insbesondere für Methoden der lokalen Suche, d. h. bei vollständiger Durchsuchung der Nachbarschaft, dürften die genannten Untergraphen $G_k^{BL}(m)$ mit $k = 3, 4$ des Blockvertauschungsgraphen $G^{BL}(m)$ besondere Bedeutung haben, die jeweils eine Nachbarschaft 1. Ordnung repräsentieren.
In Interesse wären dabei Ergebnisse für einige Problemstellungen des Typs (1) bei vollständiger bzw. teilweiser Untersuchung spezieller Nachbarschaften hinsichtlich der erreichten Effektivität (Verhältnis von relativer Zielfunktionswertverbesserung zur Anzahl der erzeugten Lösungen).

LITERATUR

[1] *Balinski, M. L., Russakoff, A.*: On the assignment polytope, SIAM Review, Vol. 16, Nr. 4, 1974, 516 bis 526.

[2] *Beaux de, U.*: Untersuchungen zu praktischen Lösungsmöglichkeiten von Reihenfolgeproblemen und deren Struktur. Diplomarbeit, Techn. Hochsch. Magdeburg, 1981.

[3] *Blümel, E.*: Zur Quasikonvexität spezieller Permutationsprobleme. Dissertation A, Techn. Hochsch. Magdeburg, 1985.

[4] *Burkard, R. E., Stratmann, K. H.*: Numerical investigations on quadratic assignment problems. Naval Res. Log. Quart. 25, 1978, No. 1, 129—148.

[5] *Emelicev, V. A., Kowalev, M. M., Kravcov, U. K.*: Polyeder, Graphen, Optimierung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985.

[6] *Flachsmeyer, J.*: Kombinatorik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[7] *Knuth, D. E.*: The Art of Computer Programming, Vol. 3: Sorting and Searching, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[8] *Krone, M. J., Steiglitz, K.*: Heuristic programming solution of a flowshop scheduling problem, Operations Research 22, 1974, 629—638.

[9] *Lin, S., Kernighan, B. W.*: An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem. Operations Research 21, 1973, 488—516.

[10] *Lugowski, H., Weinert, H.*: Grundzüge der Algebra, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1968.

[11] *Seiffart, E.*: Zur Struktur von Graphen zum Zuordnungspolyeder, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 26 (1982) H. 3, 49—54.

[12] *Werner, F.*: Zur Lösung spezieller Reihenfolgeprobleme. Dissertation A, Techn. Hochsch. Magdeburg, 1984.

[13] *Werner, F.*: Zu einigen Nachbarschaftsstrukturen für Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung spezieller Reihenfolgeprobleme, eingereicht in „optimization".