УДК 519.1

Ю. Л. ОРЛОВИЧ, В. С. ГОРДОН, Ф. ВЕРНЕР

ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ В ГРАФАХ ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ РЕШЕТКИ

(*Представлено академиком И. В. Гайшуном*)

Институт математики НАН Беларуси,
Объединенный институт проблем информатики
НАН Беларуси,
Университет г. Магдебурга, Германия

Поступило ??.??.05

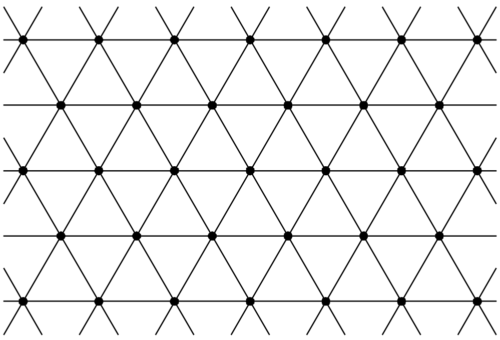
Введение. В статье рассматриваются гамильтоновы свойства конечных порожденных подграфов бесконечного графа, ассоциированного с двумерной триангулированной решеткой. Исследование таких свойств в значительной степени стимулируется их значением для приложений и давно привлекает внимание специалистов. Известны связи гамильтоновых свойств указанных графов с задачами конфигурационной статистики полимеров [1, 2], задачами распознавания образов, а также весьма популярной в молекулярной биологии и исключительно глубокой проблемой свертки белка [3, 4].

Далее под *графом* (если дополнительно не оговорено) понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Все термины и обозначения, употребляемые нами без определения, можно найти в [5]. Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Простая цепь, соединяющая вершины u и v графа G, называется (u,v)*-цепью*. Граф *связен*, если для любых его вершин u и v существует (u,v)-цепь. Две (u,v)-цепи графа G называются *непересекающимися*, если у них нет общих вершин, за исключением u и v. Граф k*-связен* ($k \geq 2$), если любая пара его несовпадающих вершин u и v соединена по крайней мере k непересекающимися (u,v)-цепями. *Окружением* вершины u в графе G называется множество $N(u)$ всех вершин в G, смежных с u. Через $\deg u$ обозначается степень вершины u, т.е. число вершин в $N(u)$. Подграф графа G, порожденный множеством $X \subseteq V(G)$, обозначается через $G(X)$. Вершина u графа G называется *локально связной*, если граф $G(N(u))$ связен. Граф G называется *локально связным*, если каждая его вершина локально связна.

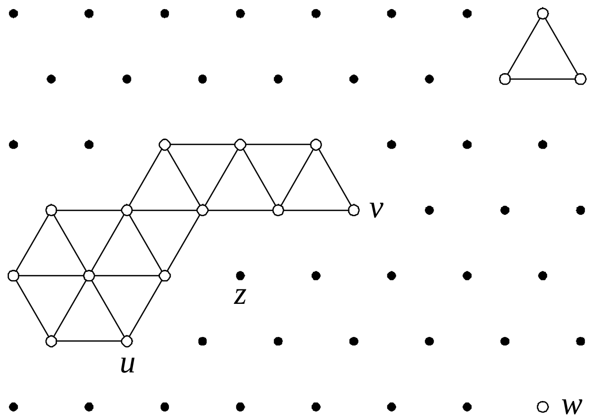
Простая цепь, содержащая каждую вершину графа, называется *гамильтоновой*. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т.е. простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Как обычно, через P_k и C_k обозначаются простая цепь и простой цикл с k вершинами соответственно. В частности, C_3 есть треугольник.

В графе G простой цикл C называется *расширяемым*, если существует такой простой цикл C', что $V(C) \subset V(C')$ и $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Связный граф, в котором каждая вершина лежит в треугольнике и каждый простой негамильтонов цикл – расширяемый, называется *вполне циклически расширяемым*. Понятно, что вполне циклически расширяемый граф является гамильтоновым.

Определим бесконечный граф T^{∞}, ассоциированный с двумерной триангулированной решеткой, следующим образом. Вершинами графа T^{∞} являются точки плоскости с декартовыми координатами $\left(x + y/2,\ y\sqrt{3}/2\right)$, где x и y – целые числа. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1. Будем считать, что T^{∞} – геометрический граф, т.е. граф, уложенный на плоскости так, что каждое его ребро представляет собой замкнутый прямолинейный отрезок (рис. 1, *а*).



а



б

Рис. 1. Граф T^{∞} (*а*) и линейно выпуклый T^*-граф (*б*)

Произвольный конечный порожденный подграф графа T^{∞} называется *графом триангулированной решетки* или просто T^**-графом*. T^*-граф называется *линейно выпуклым*, если его пересечение с каждой прямой l, содержащей ребро графа T^{∞}, либо пусто, либо является точкой или отрезком прямой l. Пример линейно выпуклого T^*-графа G приведен на рис. 1, *б*, где черным точкам соответствуют вершины графа T^{∞}. Граф G имеет три компоненты, включая изолированную вершину w. Заметим, что вершина z графа T^{∞} не принадлежит $V(G)$, хотя и находится на середине отрезка с концами в вершинах u и v графа G.

1. Локально связные графы триангулированной решетки. В работе [6] показано, что все 2-связные линейно выпуклые T^*-графы (за исключением одного) являются гамильтоновыми. Единственное исключение – 2-связный линейно выпуклый T^*-граф D, приведенный на рис. 2, *а*. Отсутствие гамильтонова цикла в графе D следует из того, что этот 13-вершинный граф содержит множество из семи попарно несмежных вершин, а простой цикл длины 13 может содержать не более шести таких вершин.

В следствии 1 показано, что отмеченный выше результат работы [6] (усиленный заменой свойства гамильтоновости на вполне циклическую расширяемость) справедлив для более широкого класса локально связных T^*-графов. Взаимосвязь между классами 2-связных линейно выпуклых T^*-графов, рассмотренных в [6], и локально связных T^*-графов устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Каждый 2-связный линейно выпуклый T^*-граф является локально связным T^*-графом.*

Заметим, что утверждение, обратное теореме 1, неверно. Действительно, на рис. 2, *б* показан связный локально связный T^*-граф, который не является линейно выпуклым, поскольку пересечение этого графа с прямой, проходящей через ребра графа T^∞, представляет собой отрезок (ребро vw) и точку (изолированную вершину u).

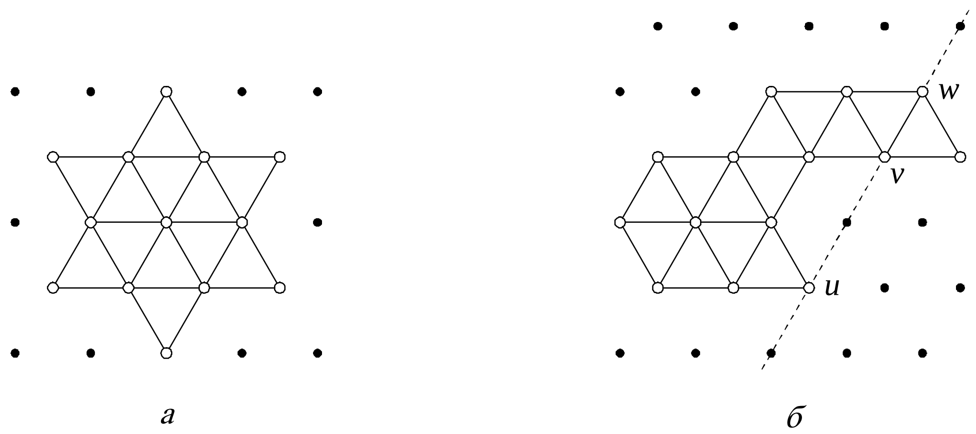


Рис. 2. Граф D (*а*) и локально связный, но не линейно выпуклый T^*-граф (*б*)

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, введем обозначения для вершин из окружения некоторой вершины графа T^∞. Заметив, что окружение каждой вершины графа T^∞ содержит шесть вершин-соседей, обозначим их в соответствии с рис. 3, *а*.

Например, запись $v = \mathrm{UR}(u)$ означает, что вершина *v* является правым верхним (up-right) соседом вершины *u*.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Доказательство проведем от противного. Предположим, что 2-связный линейно выпуклый T^*-граф *G* содержит вершину *u*, которая не является локально связной. Заметим, что $\deg u \le 4$, иначе граф $G(N(u))$ связен и изоморфен либо P_5, если $\deg u = 5$, либо C_6, если $\deg u = 6$. С другой стороны, в силу 2-связности графа *G* имеем $\deg u \ge 2$. Следовательно, возможны три следующих случая.

С л у ч а й 1. $\deg u = 2$.

Пусть $N(u) = \{v, w\}$. В силу симметрии имеются две возможности: $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DL}(u)$ (рис. 3, *б*) и $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DR}(u)$ (рис. 3, *в*). Поскольку *G* – 2-связный граф, существует (v, w)-цепь *P*, непересекающаяся с цепью (v, u, w). Рассмотрим прямую *l*, содержащую ребро $u\mathrm{R}(u)$ графа T^∞. Пересечение этой прямой с графом *G* содержит изолированную вершину *u* (так как $\mathrm{L}(u)$ и $\mathrm{R}(u)$ не принадлежат *G*) и по крайней мере одну вершину цепи *P*, что противоречит линейной выпуклости графа *G*.

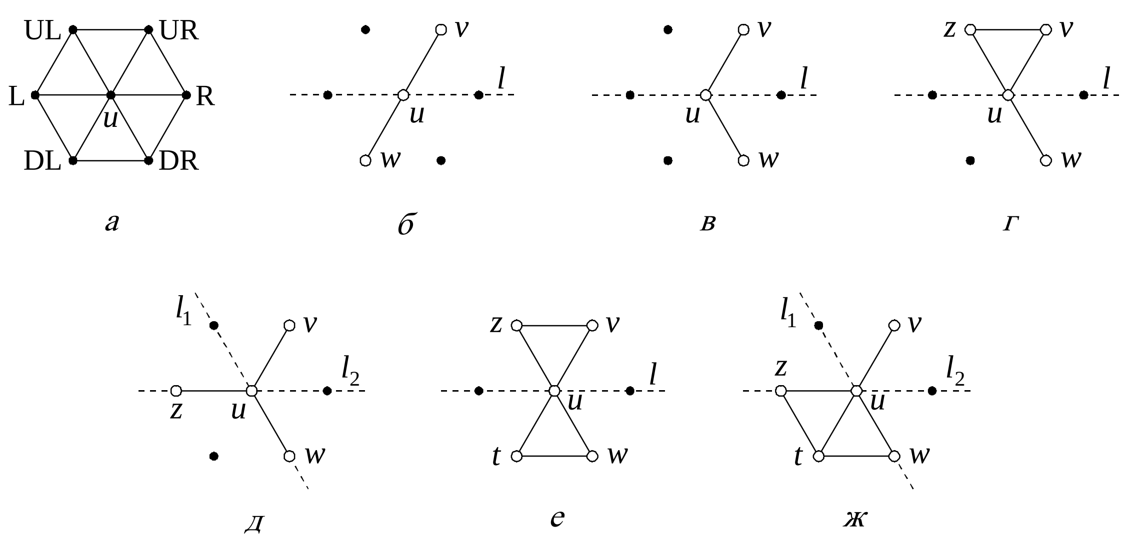


Рис. 3. Окружение вершины *u* графа T^∞ (*а*) и случаи 1 – 3 теоремы 1 (*б* – *ж*)

С л у ч а й 2. $\deg u = 3$.

Пусть $N(u) = \{v, w, z\}$. В силу симметрии возможны две ситуации: $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DR}(u)$, $z = \mathrm{UL}(u)$ (рис. 3, *г*) и $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DR}(u)$, $z = \mathrm{L}(u)$ (рис. 3, *д*). В первой ситуации доказательство аналогично случаю 1. Перейдем к рассмотрению второй ситуации. Поскольку *G* – 2-связный граф, существует (v, w)-цепь *P*, непересекающаяся с цепью

(v, u, w). Пусть l_1 и l_2 – прямые, содержащие соответственно ребра uw и uz графа T^∞ (рис. 3, *д*), а l' и l'' – лучи (полупрямые l_1 и l_2), выходящие из u и пересекающие соответственно $\mathrm{UL}(u)$ и $\mathrm{R}(u)$. Легко видеть, что пересечение прямой l_1 (прямой l_2) с графом *G* содержит ребро uw (ребро uz) и не содержит вершину $\mathrm{UL}(u)$ (вершину $\mathrm{R}(u)$). С другой стороны, пересечение этих прямых с графом *G* содержит хотя бы одну вершину цепи *P* либо на луче l', либо на луче l''. Следовательно, приходим к противоречию с линейной выпуклостью графа *G*.

С л у ч а й 3. $\deg u = 4$.

Пусть $N(u) = \{v, w, z, t\}$. В силу симметрии возможны две ситуации: $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DR}(u)$, $t = \mathrm{DL}(u)$, $z = \mathrm{UL}(u)$ (рис. 3, *е*) и $v = \mathrm{UR}(u)$, $w = \mathrm{DR}(u)$, $t = \mathrm{DL}(u)$, $z = \mathrm{L}(u)$ (рис. 3, *ж*), в которых приходим к противоречию аналогично случаю 2. Теорема доказана.

Таким образом, пример графа на рис. 2, *б* и теорема 1 показывают, что 2-связные линейно выпуклые T^*-графы образуют собственный подкласс класса всех связных локально связных T^*-графов. Заметим, что графы из этого класса (за исключением P_1 и P_2) являются также 2-связными, поскольку каждый связный локально *k*-связный граф $(k+1)$-связен [7].

2. Циклическая расширяемость. Заметим, что окружение каждой вершины связного локально связного T^*-графа, содержащего три и более вершины, порождает подграф, изоморфный одному из следующих пяти графов: P_2, P_3, P_4, P_5 или C_6. В этом разделе рассматривается класс $\boldsymbol{L}$ всех связных графов, окружения вершин которых обладают указанным выше свойством, т.е. $G(N(u)) \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, C_6\}$ для любого графа $G \in \boldsymbol{L}$ и любой вершины $u \in V(G)$. Ясно, что связные локально связные T^*-графы с числом вершин $n \geq 3$ и, следовательно, 2-связные линейно выпуклые T^*-графы принадлежат классу $\boldsymbol{L}$.

Циклические свойства графов, принадлежащих классу $\boldsymbol{L}$, устанавливает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть* G *– связный граф и* $G(N(u)) \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, C_6\}$ *для любой вершины* $u \in V(G)$. *Тогда либо* G *изоморфен графу D, либо* G *– вполне циклически расширяемый граф.*

Объем статьи не позволяет привести полное доказательство теоремы, поэтому ограничимся описанием только его схемы.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Заметим, что каждая вершина *u* графа *G* лежит в треугольнике и имеет степень $\deg u \geq 2$. Предположив, что граф *G* не является вполне циклически расширяемым, приходим к противоречию или устанавливаем, что *G* изоморфен графу *D* посредством нижеследующей цепочки утверждений.

Пусть $C = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ – нерасширяемый негамильтонов цикл на $k < |V(G)|$ вершинах и $S = V(G) \setminus V(C)$. Поскольку граф *G* связен, существует вершина $x \in S$, смежная с некоторой вершиной цикла *C*. Без ограничения общности будем считать, что *x* смежна с u_1. Тогда $3 \le \deg u_1 \le 6$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Степень вершины* u_1 *не меньше четырех, т.е.* $\deg u_1 \ge 4$.

У т в е р ж д е н и е 2. *Все соседи вершины* u_1*, кроме x, находятся на цикле C.*

У т в е р ж д е н и е 3. $\deg u_1 \ne 4$.

У т в е р ж д е н и е 4. *Если* $\deg x \ge 3$*, то подграфы* $G(\{u_1, u_3, x\})$ *и* $G(\{u_1, u_{k-1}, x\})$ *являются треугольниками в графе G.*

У т в е р ж д е н и е 5. $\deg u_1 \ne 6$.

У т в е р ж д е н и е 6. $\deg u_1 = 5$ *и* $2 \le \deg x \le 6$.

У т в е р ж д е н и е 7. *Если* $\deg u_1 = 5$ *и* $\deg x = 2$*, то либо C – расширяемый цикл, либо граф G изоморфен графу D.*

У т в е р ж д е н и е 8. *Если* $\deg u_1 = 5$ *и* $3 \le \deg x \le 6$*, то C – расширяемый цикл.*

Таким образом, согласно утверждениям 7 и 8, либо приходим к противоречию с нерасширяемостью цикла *C*, либо устанавливаем, что граф *G* изоморфен графу *D*. Это завершает схему доказательства теоремы 2.

Очевидными следствиями теоремы 2 являются следующие утверждения.

С л е д с т в и е 1. *Если G – связный локально связный* T^**-граф с числом вершин* $n \ge 3$*, то либо G изоморфен графу D, либо G – вполне циклически расширяемый граф.*

С л е д с т в и е 2. *Если G – 2-связный линейно выпуклый* T^**-граф, то либо G изоморфен графу D, либо G – вполне циклически расширяемый граф.*

Основной результат работы [6] о гамильтоновости 2-связных линейно выпуклых T^*-графов непосредственно вытекает из следствия 2.

3. Распознавание гамильтоновости графов триангулированной решетки. Обратимся к следующей хорошо известной задаче распознавания [8].

ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ

Условие: Задан граф *G*.

Вопрос: Содержит ли *G* гамильтонов цикл?

Известно, что эта задача NP-полна в классе всех графов и остается таковой даже для достаточно узких классов графов: двудольных графов, реберных графов, 3-связных кубических планарных графов, максимальных планарных графов и др.

В работе [9] доказано, что задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ является NP-полной для графов квадратной решетки, т.е. конечных порожденных подграфов бесконечного графа, ассоциированного с двумерной квадратной решеткой. Следующая теорема устанавливает NP-полноту задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для графов триангулированной решетки.

Т е о р е м а 3. *Задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для произвольного* T^**-графа является NP-полной.*

Для доказательства теоремы в качестве эталонной NP-полной задачи используется задача распознавания гамильтоновости двудольного кубического планарного графа [10] и применяется идея доказательства из [9].

Заметим, что из следствия 1 вытекает разрешимость за полиномиальное время задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для локально связных T^*-графов. Более того, справедливы следующие теорема и ее следствие о возможности построения гамильтонова цикла за полиномиальное время для рассматриваемых нами графов.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – граф из условия теоремы* 2, *неизоморфный графу D. Если* $C = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ *– цикл длины k в этом графе, где* $3 \le k < |V(G)|$, *то цикл* C' *длины* $k+1$ *и такой, что* $V(C) \subset V(C')$, *может быть найден за полиномиальное время.*

С л е д с т в и е 3. *Гамильтонов цикл в связном локально связном* T^**-графе, неизоморфном графу D, может быть найден за полиномиальное время.*

На рис. 4 приведен пример связного локально связного T^*-графа, один из гамильтоновых циклов которого изображен жирной линией. Этот граф не является линейно выпуклым и содержит внутренние пустые области – “дыры” (holes). Заметим, что для графов квадратной решетки полиномиальный алгоритм построения гамильтонова цикла известен только в случае отсутствия у этих графов дыр [11].

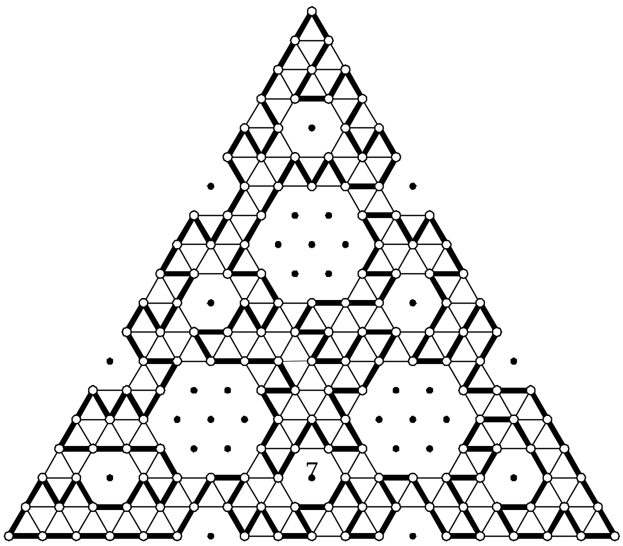


Рис. 4. Локально связный T^*-граф и один из его гамильтоновых циклов

В заключение рассмотрим следующую задачу [8].

ГАМИЛЬТОНОВА (u,v)-ЦЕПЬ

Условие: Задан граф G и вершины $u,v \in V(G)$.

Вопрос: Содержит ли G гамильтонову (u,v)-цепь?

С использованием теоремы 3 доказывается справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 5. *Задача ГАМИЛЬТОНОВА* (u,v)*-ЦЕПЬ для произвольного* T^**-графа является NP-полной.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект 03-51-5501).

Литература

1. D e s C l o i z e a u x J., J a n n i k G. Polymers in solution: their modelling and structure. Oxford, 1987.
2. L u a R., B o r o v i n s k i y A. L., G r o s b e r g A. Yu. // Polymer. 2004. Vol. 45. P. 717–731.
3. A g a r w a l a R., B a t z o g l o u S., D a n č í k V., D e c a t u r S. E., F a r a c h M., H a n n e n h a l l i S., S k i e n a S. // J. Comput. Biology. 1997. Vol. 4. P. 275–296.
4. D o n i a c h S., G a r e l T., O r l a n d H. // J. Chem. Phys. 1996. Vol. 105. P. 1601–1608.
5. Е м е л и ч е в В. А., М е л ь н и к о в О. И., С а р в а н о в В. И., Т ы ш к е в и ч Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990.
6. R e a y J. R., Z a m f i r e s c u T. // Discrete Comput. Geom. 2000. Vol. 24. P. 497–502.
7. C h a r t r a n d G., P i p p e r t R. // Časopis Pěst. Mat. 1974. Vol. 99. P. 158–163.
8. Г э р и М., Д ж о н с о н Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
9. I t a i A., P a p a d i m i t r i o u C. H., S z w a r c f i t e r J. L. // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11. P. 676–686.
10. P l e s n i k J. // Acta Math. Univ. Comenian. 1983. Vol. 42-43. P. 271–273.
11. L e n h a r t W., U m a n s C. // Proc. 38th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). 1997. P. 496–505.