УДК 519.1

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛАХ В ГРАФАХ ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ РЕШЕТКИ

Ф. Вернер[1], В.С. Гордон[2], Ю.Л. Орлович[3]

[1] Университет г. Магдебурга, Германия; [2] ОИПИ НАН Беларуси, Минск;
[3] Институт математики НАН Беларуси, Минск

Показано, что все связные локально связные графы триангулированной решетки, содержащие три и более вершины, являются (за единственным исключением) вполне циклически расширяемыми. Установлено также, что задача распознавания гамильтоновости для графов триангулированной решетки NP-полна.

Введение

Рассматриваются гамильтоновы свойства конечных порожденных подграфов бесконечного графа, ассоциированного с двумерной триангулированной решеткой. Исследование таких свойств в значительной степени стимулируется их значением для приложений и давно привлекает внимание специалистов. Известны связи гамильтоновых свойств указанных графов с задачами конфигурационной статистики полимеров [1], задачами распознавания образов, а также весьма популярной в молекулярной биологии и исключительно глубокой проблемой свертки белка [2].

Далее под *графом* (если дополнительно не оговорено) понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Все термины и обозначения, употребляемые нами без определения, можно найти в [3]. Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Простая цепь, соединяющая вершины u и v графа G, называется (u,v)-*цепью*. Граф *связен*, если для любых его вершин u и v существует (u,v)-цепь. Граф *k-связен* $(k \geq 2)$, если любая пара его несовпадающих вершин u и v соединена по крайней мере k непересекающимися (u,v)-цепями. *Окружением* вершины u в графе G называется множество $N(u)$ всех вершин в G, смежных с u. Подграф графа G, порожденный множеством $X \subseteq V(G)$, обозначается через $G(X)$. Вершина u графа G называется *локально связной*, если граф

$G(N(u))$ связен. Граф G называется *локально связным*, если каждая его вершина локально связна.

Простая цепь, содержащая каждую вершину графа, называется *гамильтоновой*. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т.е. простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Как обычно, через P_k и C_k обозначаются простая цепь и простой цикл с k вершинами соответственно. В графе G простой цикл C называется *расширяемым*, если существует такой простой цикл C', что $V(C) \subset V(C')$ и $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Связный граф, в котором каждая вершина лежит в треугольнике и каждый простой негамильтонов цикл – расширяемый, называется *вполне циклически расширяемым*. Понятно, что вполне циклически расширяемый граф является гамильтоновым.

Определим бесконечный граф T^{∞}, ассоциированный с двумерной триангулированной решеткой, следующим образом. Вершинами графа T^{∞} являются точки плоскости с декартовыми координатами $\left(x + y/2,\, y\sqrt{3}/2\right)$, где x и y – целые числа. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1. Будем считать, что T^{∞} – геометрический граф, т.е. граф, уложенный на плоскости так, что каждое его ребро представляет собой замкнутый прямолинейный отрезок (рис. 1, *а*).

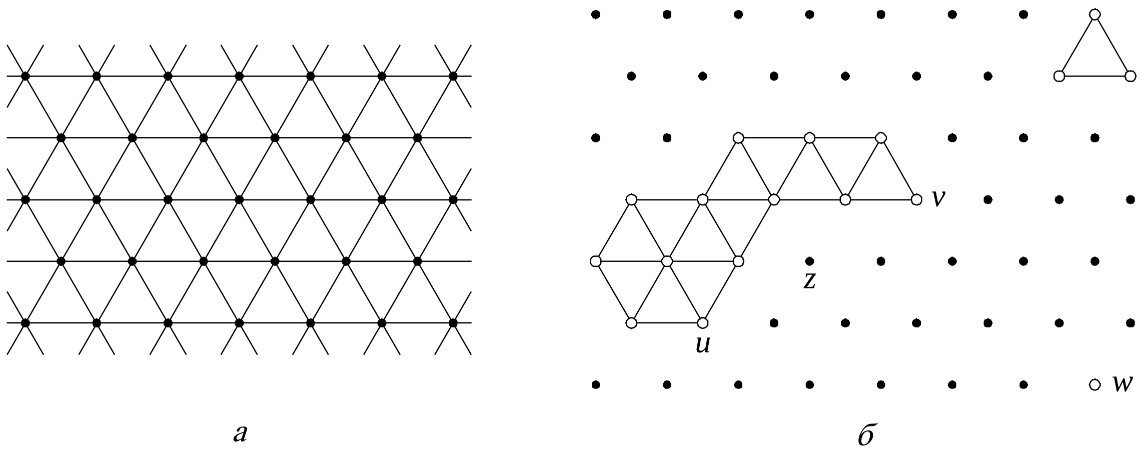


Рис. 1. Граф T^{∞} (*а*) и линейно выпуклый T^*-граф (*б*)

Произвольный конечный порожденный подграф графа T^{∞} называется *графом триангулированной решетки* или просто T^**-графом*. T^*-граф называется *линейно выпуклым*, если его пересечение с каждой прямой l, содержащей ребро графа T^{∞}, либо пусто, либо является точкой или отрезком прямой l. Пример линейно выпуклого T^*-графа G приведен на рис. 1, *б*, где черным точкам соответствуют вершины графа T^{∞}. Граф G имеет три компоненты, включая изолированную вершину w. Заметим, что вершина z графа T^{∞} не принадлежит $V(G)$, хотя и находится на середине отрезка с концами в вершинах u и v графа G.

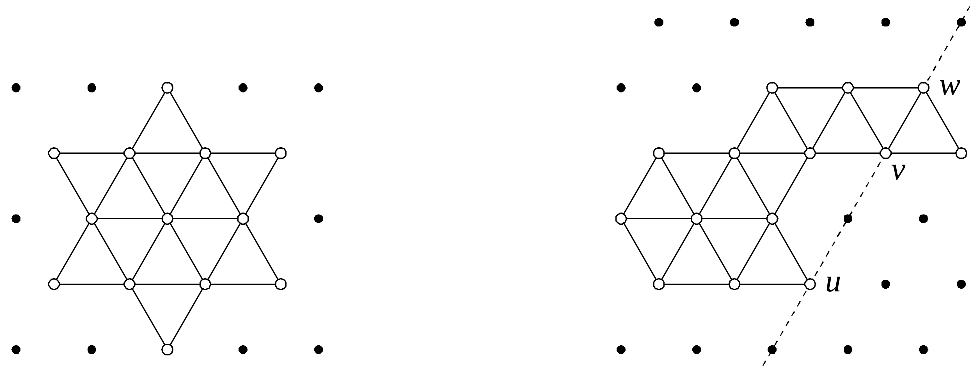
Локальная связность и циклическая расширяемость

В работе [4] показано, что все 2-связные линейно выпуклые T^*-графы (за исключением одного) являются гамильтоновыми. Единственное исключение – 2-связный линейно выпуклый T^*-граф D, приведенный на рис. 2, *а*. Отсутствие гамильтонова цикла в графе D следует из того, что этот 13-вершинный граф содержит множество из семи попарно несмежных вершин, а простой цикл длины 13 может содержать не более шести таких вершин.

В следствии 1 показано, что отмеченный выше результат работы [4] (усиленный заменой свойства гамильтоновости на вполне циклическую расширяемость) справедлив для более широкого класса локально связных T^*-графов. Взаимосвязь между классами 2-связных линейно выпуклых T^*-графов, рассмотренных в [4], и локально связных T^*-графов устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Каждый 2-связный линейно выпуклый T^*-граф является локально связным T^*-графом.*

Заметим, что утверждение, обратное теореме 1, неверно. Действительно, на рис. 2, *б* показан связный локально связный T^*-граф, который не является линейно выпуклым, поскольку пересечение этого графа с прямой, проходящей через ребра графа T^{∞}, представляет собой отрезок (ребро vw) и точку (изолированную вершину u).



а *б*

Рис. 2. Граф D (*а*) и локально связный, но не линейно выпуклый T^*-граф (*б*)

Таким образом, пример графа на рис. 2, *б* и теорема 1 показывают, что 2-связные линейно выпуклые T^*-графы образуют собственный подкласс класса всех связных локально связных T^*-графов. Заметим, что графы из этого класса (за исключением графов P_1 и P_2) являются также 2-связными, поскольку каждый связный локально *k*-связный граф $(k+1)$-связен.

Нетрудно видеть, что окружение каждой вершины связного локально связного T^*-графа, содержащего три и более вершины, порождает подграф, изоморфный одному из следующих пяти графов: P_2, P_3, P_4, P_5 или C_6. Рассмотрим класс $\boldsymbol{L}$ всех связных графов, окружения вершин которых обладают указанным выше свойством, т.е. $G(N(u)) \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, C_6\}$ для любого графа $G \in \boldsymbol{L}$ и любой вершины $u \in V(G)$. Ясно, что связные локально связные T^*-графы с числом вершин $n \geq 3$ и, следовательно, 2-связные линейно выпуклые T^*-графы принадлежат классу $\boldsymbol{L}$.

Циклические свойства графов, принадлежащих классу $\boldsymbol{L}$, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G – связный граф и* $G(N(u)) \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, C_6\}$ *для любой вершины* $u \in V(G)$*. Тогда либо G изоморфен графу D, либо G – вполне циклически расширяемый граф.*

Очевидными следствиями теоремы 2 являются следующие утверждения.

Следствие 1. *Если G – связный локально связный* T^**-граф с числом вершин* $n \geq 3$*, то либо G изоморфен графу D, либо G – вполне циклически расширяемый граф.*

Следствие 2. *Если G – 2-связный линейно выпуклый* T^**-граф, то либо G изоморфен графу D, либо G – вполне циклически расширяемый граф.*

Основной результат работы [4] о гамильтоновости 2-связных линейно выпуклых T^*-графов непосредственно вытекает из следствия 2.

Распознавание гамильтоновости графов триангулированной решетки

Обратимся к задаче распознавания ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ [5]. Известно, что эта задача NP-полна для произвольных графов и остается такой даже при значительных сужениях класса графов [5]. В работе [6] доказано, что задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ является NP-полной для конечных порожденных подграфов бесконечного графа, ассоциированного с двумерной квадратной решеткой. Следующая теорема устанавливает NP-полноту задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для графов триангулированной решетки.

Теорема 3. *Задача ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для произвольного T^*-графа является NP-полной.*

Заметим, что из следствия 1 вытекает разрешимость за полиномиальное время задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ для локально связных T^*-графов. Более того, справедливы следующие теорема и ее следствие о возможности построения гамильтонова цикла за полиномиальное время для рассматриваемых нами графов.

Теорема 4. *Пусть G – граф из условия теоремы 2, неизоморфный графу D. Если $C=(u_1,u_2,\ldots,u_k,u_1)$ – цикл длины k в этом графе, где $3 \le k < |V(G)|$, то цикл C' длины $k+1$ и такой, что $V(C) \subset V(C')$, может быть найден за полиномиальное от k время.*

Следствие 3. *Гамильтонов цикл в связном локально связном T^*-графе, неизоморфном графу D, может быть найден за полиномиальное время.*

В заключение рассмотрим следующую задачу [5].

ГАМИЛЬТОНОВА (u,v)-ЦЕПЬ

Условие: Задан граф G и вершины $u,v \in V(G)$.

Вопрос: Содержит ли G гамильтонову (u,v)-цепь?

С использованием теоремы 3 доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Задача ГАМИЛЬТОНОВА (u,v)-ЦЕПЬ для произвольного T^*-графа является NP-полной.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект 03-51-5501).

Литература

1. Lua R., Borovinskiy A.L., Grosberg A.Yu. Fractal and statistical properties of large compact polymers: a computational study // Polymer. 2004. Vol. 45. P. 717-731.

2. Doniach S., Garel T., Orland H. Phase diagram of a semiflexible polymer in a θ solvent: application to protein folding // J. Chem. Phys. 1996. Vol. 105. P. 1601-1608.

3. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.

4. Reay J.R., Zamfirescu T. Hamiltonian cycles in *T*-graphs // Discrete Comput. Geom. 2000. Vol. 24. P. 497-502.

5. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.

6. Itai A., Papadimitriou C.H., Szwarcfiter J.L. Hamiltonian paths in grid graphs // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11. P. 676-686.