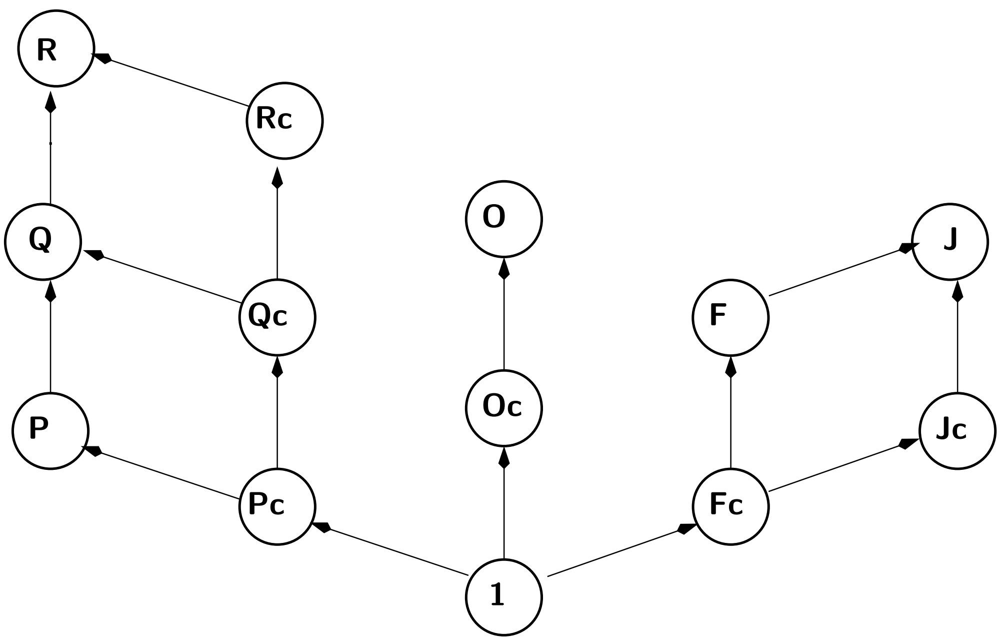
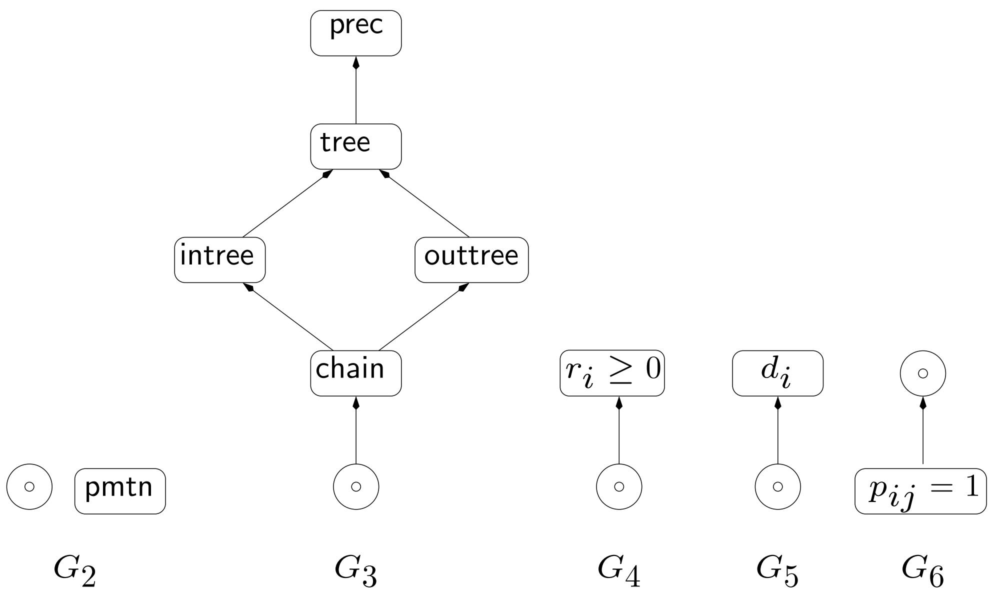
# Der Graph $G_1$

Ordne jedem $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ - Problem einen 7-Tupel von jeweils einen Knoten aus den folgenden Graphen $G_1, \ldots, G_7$ zu:

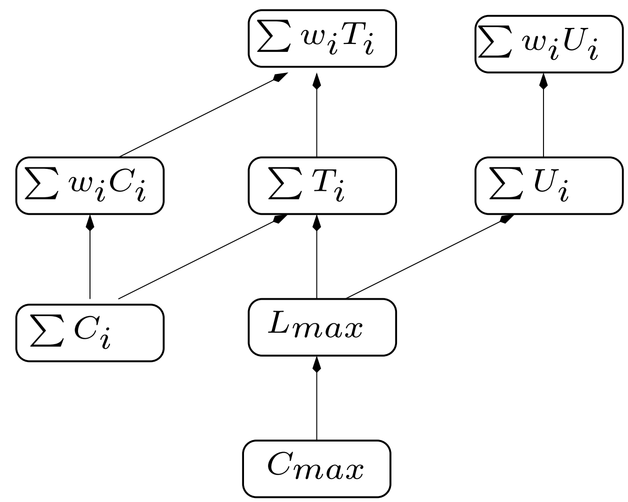



Graph $G_1$ bezüglich $\alpha$

# Die Graphen $G_2$ bis $G_7$




Die Graphen $G_2$ bis $G_6$ bezüglich $\beta$




Graph $G_7$ bezüglich $\gamma$

**Satz 1.** *Gegeben sind die Probleme $P$ und $Q$ mit den zugeordneten 7-Tupeln $(v_1, \ldots, v_7)$ und $(v_1^*, \ldots, v_7^*)$. Dann ist das Problem $P$ auf das Problem $Q$ reduzierbar, wenn für alle $i$ entweder $v_i = v_i^*$ erfüllt ist oder ein Weg von $v_i$ nach $v_i^*$ in $G_i$ existiert.*

# Entscheidungsprobleme in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{NP}$-complete

| $\mathbb{P}$ | $\mathbb{NP}$-complete |
|---|---|
| **(a) Einmaschinenprobleme** | |
| $1 \mid prec, r_i \geq 0 \mid C_{max}$<br>$O(n^2)$ Lawler (1973) | $1 \mid r_i \geq 0 \mid L_{max}$ |
| $1 \mid prec \mid f_{max}$<br>$O(n^2)$ Lawler (1973) | |
| $1 \mid tree \mid \sum w_i C_i$<br>$O(n \log n)$ Horn (1972) | $1 \mid prec, p_i = 1 \sum w_i C_i$<br>$1 \mid r_i \geq 0 \mid \sum C_i$<br>$1 \mid C_i \leq d_i \mid \sum w_i C_i$ |
| $1 \mid\mid \sum U_i$<br>$O(n \log n)$ Moore (1968) | $1 \mid tree, p_i = 1 \mid \sum U_i$<br>$1 \mid r_i \geq 0 \mid \sum U_i$<br>$1 \mid\mid \sum w_i U_i$ |
| $1 \mid r_i, p_i = 1 \mid \sum f_i(C_i)$<br>$O(n^3)$ Lawler für $f_i = w_i T_i$<br>(Lösung eines Zuordnungsproblems) | $1 \mid chain, p_i = 1 \mid \sum T_i$<br>$1 \mid\mid \sum T_i$ |

# Entscheidungsprobleme in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{NP}$-complete

| $\mathbb{P}$ | $\mathbb{NP}$-complete |
|---|---|
| **(b) Parallelmaschinenprobleme** | |
| $P \mid tree, p_i = 1 \mid C_{max}$<br>$O(n)$ Hu (1961) | $P2 \mid prec, 1 \leq p_{ij} \leq 2 \mid C_{max}$<br>$P \mid prec, p_i = 1 \mid C_{max}$<br>$P2 \mid\mid C_{max}$ |
| $Q2 \mid pmtn, prec \mid L_{max}$<br>$O(n^2)$ Lawler (1982) | |
| $P2 \mid prec, r_i \geq 0, p_i = 1 \mid L_{max}$<br>$O(n^3 \log n)$ Garey & Johnson (1977) | |
| $P2 \mid prec, p_i = 1 \mid \sum C_i$<br>$O(n^2)$ Coffman & Graham (1972) | $P2 \mid prec, p_i = 1 \mid \sum w_i C_i$ |
| $R \mid\mid \sum C_i$<br>$O(n^3 m)$ Bruno et al. (1974) | $P2 \mid\mid \sum w_i C_i$ |

# Entscheidungsprobleme in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{NP}$-complete

| $\mathbb{P}$ | $\mathbb{NP}$-complete |
|---|---|
| **(c) Flow-Shop Probleme** | |
| $F2 \mid C_{max}$<br>$O(n \log n)$ Johnson (1954) | $F2 \mid\mid L_{max}$<br>$F2 \mid\mid \sum C_i$<br>$F2 \mid r_i \geq 0 \mid C_{max}$<br>$F3 \mid\mid C_{max}$ |
| **(d) Job-Shop Probleme** | |
| $J2 \mid n_i \leq 2 \mid C_{max}$<br>$O(n \log n)$ Jackson (1956) | $J2 \mid 1 \leq p_{ij} \leq 2 \mid C_{max}$<br>$J2 \mid\mid \sum C_i$ |
| $J2 \mid p_{ij} = 1 \mid L_{max}$<br>$O(n^2)$ Timkovsky (1994) | $J3 \mid p_{ij} = 1 \mid C_{max}$ |

# Entscheidungsprobleme in $\mathbb{P}$ und $\mathbb{NP}$-complete

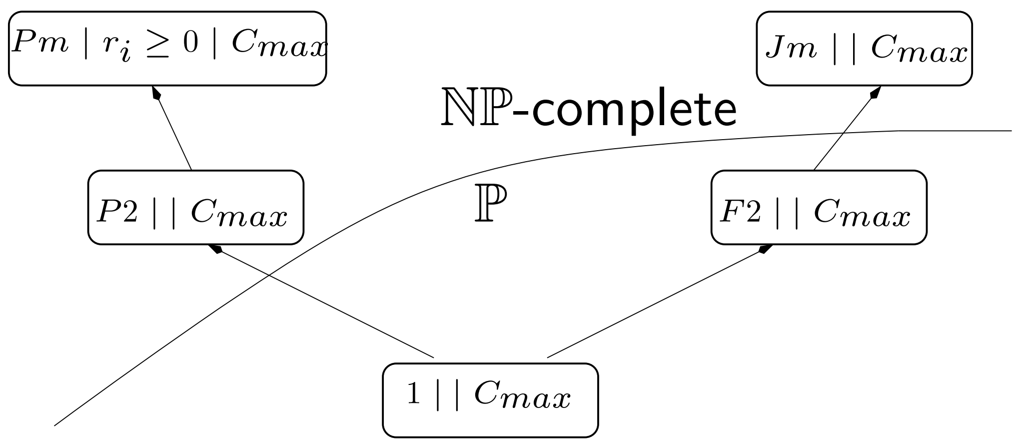
| $\mathbb{P}$ | $\mathbb{NP}$-complete |
|---|---|
| **(e) Open-Shop Probleme** | |
| $O2 \mid\mid C_{max}$<br>$O(n)$ Gonzalez & Sahni (1976) | $O2 \mid r_i \geq 0 \mid C_{max}$<br>$O2 \mid\mid L_{max}$<br>$O2 \mid\mid \sum C_i$<br>$O3 \mid\mid C_{max}$ |
| $O \mid pmtn, r_i \geq 0 \mid L_{max}$<br>$LP$ (Cho & Sahni (1981)<br>*Spezialfall:* $O \mid pmtn \mid C_{max}$<br>$O(r^2(n+m)^{0,5})$<br>$r$ - Anz. der Oper. mit $p_{ij} > 0$ | |

**detailliertere Informationen:** http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class

# Komplexitätshierarchien

**Beispiel 1.** Ordne die folgenden Probleme in einer Komplexitätsübersicht an:

$1 \mid\mid C_{max}$, $F2 \mid\mid C_{max}$, $Jm \mid\mid C_{max}$, $P2 \mid\mid C_{max}$, $Pm \mid r_i \geq 0 \mid C_{max}$.




*Komplexitätshierarchie der gegebenen Probleme*

*(a) Aus der Kenntnis, dass (für die Entscheidungsprobleme)* $F3 \mid\mid C_{max} \in \mathbb{NP}$*-complete und* $F2 \mid\mid C_{max} \in \mathbb{P}$ *gilt, folgt u.a.* $1 \mid\mid C_{max} \in \mathbb{P}$ *und* $F \mid\mid L_{max} \in \mathbb{NP}$*-complete.*

## Komplexitätshierarchien

*(b) Aus der Kenntnis, dass die Entscheidungsprobleme $F3 \mid\mid C_{max}$ und $F \mid\mid C_{max}$ in $\mathbb{NP}$-complete liegen, folgt, dass die Entscheidungsprobleme $\alpha \mid \beta \mid C_{max}$ für $\alpha \in \{F, Fc\,(c > 3), J, Jc\,(c \geq 3\}$, $\beta \in \{r_i \geq 0, prec\}$ in $\mathbb{NP}$-complete liegen.*

**Bemerkung:** Einerseits begrenzen *maximal polynomial lösbare Probleme* eine Menge ebenfalls polynomial lösbarer Probleme, und andererseits begrenzen *minimale Probleme der Klasse $\mathbb{NP}$-complete* eine Menge von ebenfalls schwer zu lösenden Problemen.

Eine Computerstudie von LAGEWEG u.a. [1981] untersuchte 4536 Probleme, die durch Kombination der Möglichkeiten für die Wahl von $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ entstehen. Davon waren im Jahre 1981 417 Probleme (9 %) polynomial lösbar und 3821 Probleme (84 %) in der Klasse $\mathbb{NP}$-complete. Der Komplexitätsstatus der restlichen 298 Probleme (7 %) war noch offen. Dies zeigt, dass die überwiegende Anzahl von Scheduling-Problemen nur schwer zu lösen ist.