Klausur: 20019 Operations Research **Wintersemester 2010/11**
Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A-4 Blätter (mit beliebigem Material)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegegen sei das folgende ganzzahlige Problem P:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max!$$

$$\begin{array}{llcrcl} \text{u.d.N.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

(a) Bestimmen Sie **grafisch** eine optimale Lösung der LP-Relaxation mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ und die zugehörige obere Schranke UB für Problem P.

(b) Betrachten Sie den **rechten** Knoten u bei Verzweigung der Wurzel gemäß Verfahren von Dakin (d.h. eine bestimmte Variable darf einen Mindestwert nicht unterschreiten). Formulieren Sie die für den Knoten u resultierende LP-Relaxation $P^*(u)$ und stellen Sie das **Anfangstableau** zur Anwendung des Simplexalgorithmus auf.

(c) Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung in (a) die Optimallösung des Problems $P^*(u)$ sowie alle Optimallösungen des ganzzahligen Ausgangsproblems P.

(12 Punkte)

2. Gegeben sei das folgende ganzzahlige (nichtlineare) Optimierungsproblem:

$$2x_1^2 + 2x_2 - x_3x_4 + x_5^2 + 2x_5x_6 \rightarrow \max!$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ & x_3 \cdot x_4 & \geq & 10 \\ & 3x_5 + x_6 & \leq & 22 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+$$

In einem genetischen Algorithmus charakterisiere das i-te Gen eines Chromosoms (Individuums) den Wert der Variablen x_i. Seien $x^1 = (4, 2, 5, 3, 5, 6)^T$ und $x^2 = (3, 4, 2, 5, 6, 3)^T$ die ausgewählten Elternchromosomen. Zur Erzeugung der Nachkommen wird zunächst ein (2,4)-Crossover und danach als Mutationen im ersten Chromosom (aus x^1 resultierend) der Wert im ersten Gen um 1 verringert und der Wert im dritten Gen um 1 vergrößert sowie im zweiten Chromosom der Wert im sechsten Gen um 1 vergrößert.

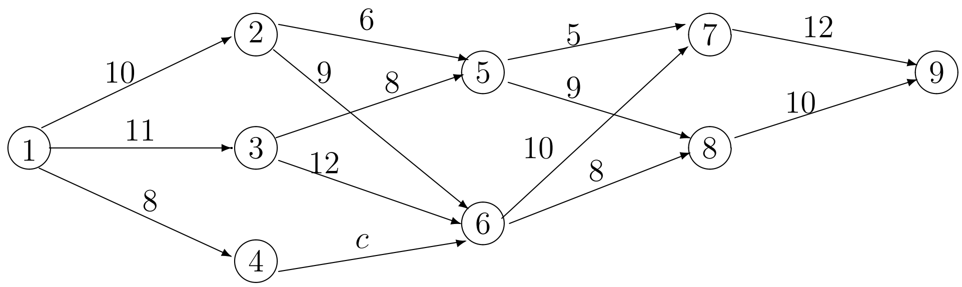
(a) Wählen Sie aus den zwei Eltern und den zwei erzeugten Nachkommen die zwei Individuen mit der besten Fitness aus.

(b) Ändert sich etwas an der Auswahl der zwei Individuen, wenn nach Anwendung des

Crossover im ersten Chromosom der Wert des ersten Gens nicht verändert wird (Rest wie in der Aufgabe beschrieben)?

(12 Punkte)

3. Um von Ort (Knoten) 1 zum Ort (Knoten) 9 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten c_{ij}, die die Entfernung vom Knoten i zum Knoten j angeben, markiert.

(a) Bestimmen Sie die Länge eines kürzesten Weges vom Ort 1 zum Ort 9 in Abhängigkeit vom Wert des Parameters $c_{46} = c$.

(b) Geben Sie für $c = 7$ alle kürzesten Wege zwischen den Orten 1 und 9 an.

(c) Sei $c = 8$. Nach Zurücklegen der ersten Teilstrecke auf einem kürzesten Weg vom Ort 1 wird bekannt, dass sich wegen Bauarbeiten die Entfernung c_{57} von 5 auf 8 vergrößert. Wie setzt der Reisende seinen Weg zum Ort 9 jetzt optimal fort?

(12 Punkte)

4. In einer Postfiliale sind 2 Schalter geöffnet. Es wird geschätzt, dass durchschnittlich pro Stunde 9 Kunden eintreffen und die Bedienung eines Kunden durchschnittlich 6 Minuten dauert. Die Zwischenankunftszeiten und Bedienungszeiten seien exponentialverteilt. Betrachtet wird jeweils der Gleichgewichtsfall.

(a) Berechnen Sie für das betrachtete Wartesystem die mittlere Wartezeit W^q eines Kunden (in Minuten) in der (gemeinsamen) Warteschlange (d.h. bis zum Beginn der Bedienung).

(b) Wegen längerer Krankheit einer Mitarbeiterin ist nur noch ein Schalter in der Filiale geöffnet. Wie lang ist die mittlere Wartezeit (in Minuten) in der Warteschlange jetzt, wenn die anderen Annahmen unverändert gelten?

(c) Angenommen, ein ankommender Kunde verlässt im Fall (b) die Post sofort wieder, falls sich bereits 5 Kunden in der Filiale befinden (d.h. die Post fasst maximal 5 Kunden). Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die sich in die Warteschlange einreihen.

(d) Sei X eine diskrete Zufallsgröße mit den Realisationen $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 7$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1) = 0,22,\ P(X = x_2) = 0,45,\ P(X = x_3) = 0,33$. Transformieren Sie die (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl $u = 0,68$ mit Hilfe der inversen Transformationsmethode in eine Realisation von X.

(14 Punkte)