Klausur: 20019 Operations Research **Wintersemester 2011/12**
Prüfer: Prof. Dr. Frank Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A-4 Blätter (mit beliebigem Vorlesungsmaterial)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegegen sei das folgende ganzzahlige Problem P:

$$x_1 + x_2 \to \min!$$

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{u.d.N.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \geq & 9 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

(a) Bestimmen Sie **grafisch** eine optimale Lösung der LP-Relaxation mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ und die zugehörige untere Schranke LB für das Problem P.

(b) Betrachten Sie den **linken** Knoten u bei Verzweigung der Wurzel bzgl. der Variablen x_2 gemäß Verfahren von Dakin (d.h. die ausgewählte Variable darf einen Höchstwert nicht überschreiten). Formulieren Sie die für den Knoten u resultierende LP-Relaxation $P^*(u)$ und führen Sie vom Anfangstableau **einen** Austauschschritt des Simplex-Algorithmus aus, indem Sie als Pivotspalte diejenige mit dem kleinsten negativen Koeffizienten in der Zielfunktionszeile wählen (erstellen Sie das resultierende komplette Tableau).

(c) Lässt sich durch Auswahl einer anderen Pivotspalte im Anfangstableau von (b) erreichen, dass die nach dem ersten Simplex-Austauschschritt erhaltene Lösung zulässig für das Problem $P^*(u)$ ist (geben Sie nur eine **kurze** Begründung Ihrer Antwort **ohne** Erstellung eine weiteren Tableaus).

(d) Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung in (a) alle Optimallösungen des ganzzahligen Ausgangsproblems P.

(15 Punkte)

2. Gegeben sei das folgende binäre Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & \to & \min! \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & \geq & 5 \\ & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & \geq & 7 \end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$$

Es seien $\mathbf{x^0} = (0, 0, 1, 1, 0)^T$ die Startlösung der aktuellen Iteration einer Tabu Suche und $TL = \{(x_3, 0), (x_5, 1)\}$ die aktuelle Tabu-Liste, wobei $(x_k, i) \in TL$ bedeutet, dass die Variable x_k den Wert i nicht annehmen darf.

(a) Bestimmen Sie den besten zulässigen Nichttabu-Nachbarn $\mathbf{x}^* \in \text{Cand}(\mathbf{x^0})$ in der Nachbarschaft $N_1(\mathbf{x^0})$, und geben Sie das gemäß $\mathbf{x}^*$ neu in TL aufzunehmende Element an.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in einem Simulated Annealing Algorithmus der unter (a) erzeugte Nachbar $\mathbf{x}^*$ von $\mathbf{x^0}$ akzeptiert, falls die aktuelle Temperatur $t = 3$ beträgt. Erzeugen Sie eine Zufallszahl z_1 gemäß der Vorschrift

$$z_i = 97 z_{i-1} \bmod (2^7 - 1), \quad z_0 = 7,$$

und entscheiden Sie mittels der aus z_1 erhaltenen (0,1)-Zufallszahl, ob $\mathbf{x}^*$ in einem Simulated Annealing Algorithmus bei der obigen Temperatur akzeptiert wird.

(11 Punkte)

3. Eine Firma verfügt über zwei Mitarbeiter, die sie zusätzlich in ihren Vertretungen in England ($i = 1$), Frankreich ($i = 2$) und Deutschland ($i = 3$) einsetzen kann. Je nachdem wie viele Mitarbeiter sie in einem dieser Länder einsetzt, ergibt sich ein zusätzlicher Ertrag. Bezeichnet man mit u_i die Anzahl der zusätzlich eingesetzten Mitarbeiter im Land i, so sind die Erträge $E_i(u_i)$ in folgender Tabelle zusammengefasst:

$u_i \setminus i$	1	2	3
0	0	0	0
1	20	22	31
2	48	40	42

(a) Bestimmen Sie den maximalen Gesamtertrag sowie eine optimale Zuordnung mittels dynamischer Optimierung.

(b) Angenommen, für $i = 1$ ändern sich die Erträge zu $E_1(1) = 23$ und $E_1(2) = 54$. Welche Zuordnung(en) ist (sind) jetzt optimal?

(11 Punkte)

4. Ein Versicherungsmakler betreibt allein eine kleine Agentur. Die Zwischenankunftszeiten der Kunden seien exponentialverteilt mit der Ankunftsrate $\alpha = 4$ (pro Stunde), und die Bedienungszeiten seien exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 12 Minuten. Betrachtet wird der Gleichgewichtsfall.

(a) Angenommen, alle eintreffenden Kunden bleiben in der Agentur. Wie groß ist der Zeitanteil des Maklers, in dem er keinen Kunden bedient, und wie groß ist die mittlere Verweilzeit W (in Minuten) eines Kunden in der Agentur? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde länger als 1,5 Stunden in der Agentur verweilt?

(b) Da die Agentur sehr klein ist und insgesamt nur 4 Sitzplätze für Kunden (einschl. des Platzes für den gerade bedienten Kunden) hat, stellt der Makler nach einiger Zeit fest, dass alle eintreffenden Kunden wieder gehen, wenn Sie bei der Ankunft keinen Sitzplatz finden. Bestimmen Sie für das resultierende Wartesystem mit endlichem Warteraum den Erfassungsgrad γ sowie die mittlere Verweilzeit (in Minuten) eines Kunden in der Agentur.

(13 Punkte)