Klausur: 20019 Operations Research **Wintersemester 2012/2013**
Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A-4 Blätter (mit beliebigem Vorlesungsmaterial; bitte die Blätter mit dem Namen versehen und zusammen mit der Klausur abgeben)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegegen sei das folgende ganzzahlige Problem:

$$x_1 + 3x_2 \to \max!$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{u.d.N.} & -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & 4x_1 & + & 7x_2 & \leq & 42 \end{array}$$

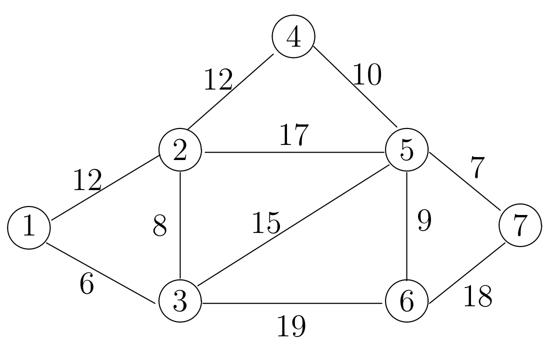
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

(a) Bestimmen Sie **grafisch** eine optimale Lösung des ganzzahligen Problems und den optimalen Zielfunktionswert.
(b) Die Basisdarstellung der optimalen Lösung der LP-Relaxation für die Wurzel u^0 lautet:

$$\begin{array}{rcrcccccl} \frac{2}{11}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & + & x_2 & & & = & 4 \\ -\frac{7}{22}x_3 & + & \frac{1}{11}x_4 & & & + & x_1 & = & \frac{7}{2} \end{array}$$

Stellen Sie das zu dieser Basisdarstellung gehörende vollständige Simplextableau auf und geben Sie die daraus resultierende obere Schranke $UB(u^0)$ der Wurzel an. Formulieren Sie den beim Schnittebenenverfahren auszuführenden Gomory-Schnitt und benennen Sie lediglich die im ersten Schritt des Gomory-Verfahrens auszutauschende Nichtbasis- und Basisvariable sowie den Wert der neuen Basisvariablen im nächsten Tableau (im gesamten Teil (b) ist **kein** Austauschschritt durchzuführen).
(14 Punkte)

2. Gegeben sei der folgende Graph mit den angegebenen Kantenbewertungen:



Betrachtet wird das Problem der Bestimmung eines Minimalgerüsts, wobei zusätzlich folgende Restriktionen erfüllt sein müssen:

1) Die Kanten [1,2] und [2,4] müssen entweder beide zum Gerüst gehören oder beide sind nicht im Gerüst enthalten.
2) Falls die Kante [3,6] im Gerüst enthalten ist, darf die Kante [5,7] nicht zum Gerüst gehören.

(a) Geben Sie das Gewicht des zulässigen Gerüsts G beschrieben durch die Kanten [1,3], [2,3], [3,5], [4,5], [5,6], [5,7] an.

(b) Geben Sie alle (zulässigen und unzulässigen) Gerüste an, die aus G durch Streichung der Kante [3,5] **(nur diese!)** und Aufnahme einer anderen Kante entstehen (es reicht aus, nur die jeweils neu aufzunehmende Kante zu nennen). Geben Sie für die dabei entstehenden zulässigen Gerüste jeweils das Gewicht an.

(c) Erzeugen Sie mittels des linearen Kongruenzgenerators $x_i = (131x_{i-1} + 19) \bmod 255$, $x_0 = 4$, eine (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl u_1 und mit dieser gemäß inverser Transformationsmethode eine Realisation z_1 (in Minuten) einer exponentialverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert von 15 Minuten.

(11 Punkte)

3. Gegeben sei das folgende (binäre) Rucksackproblem, wobei für jeden Gegenstand i sein Wert c_i und sein Volumen a_i gegeben sind ($i = 1, 2, 3, 4$):

i	1	2	3	4
c_i	3	1	5	4
a_i	2	2	4	1

Gesucht ist eine Rucksackfüllung mit maximalem Gesamtwert, so dass das Volumen $V = 6$ nicht überschritten wird.

(a) Bestimmen Sie die optimale Lösung $\mathbf{x^{LP}}$ der LP-Relaxation und eine Näherungslösung $\mathbf{x^{G}}$ mittels Greedy-Algorithmus sowie deren Zielfuntionswerte.

(b) Begründen Sie, warum innerhalb der Reduzierung auf ein Kernproblem die Fixierung $x_4 = 1$ vorgenommen werden kann und ermitteln Sie eine optimale Lösung des Kernproblems für die Gegenstände 1,2 und 3 mittels dynamischer Optimierung. Geben Sie den optimalen Zielfunktionswert für das Ausgangsproblem an.

(13 Punkte)

4. In einem Service-Center mit einer Bedienungsperson kommen durchschnittlich 8 Kunden pro Stunde an und die mittlere Bedienungszeit beträgt 6 Minuten. Die Zwischenankunftszeiten und Bedienungszeiten seien exponentialverteilt. Betrachtet wird jeweils der Gleichgewichtsfall.

(a) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit eines Kunden (in Minuten) in der Warteschlange.

(b) Auf welchen Wert verringert sich die mittlere Wartezeit (in Minuten) in der gemeinsamen Warteschlange bei Einsatz von $s = 2$ Bedienungspersonen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass **mindestens** eine der beiden Bedienungspersonen keinen Kunden bedient?

(12 Punkte)