Klausur: 20019 Operations Research **Wintersemester 2013/14**
Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A-4 Blätter (mit beliebigem Vorlesungsmaterial; bitte die Blätter mit dem Namen versehen und zusammen mit der Klausur abgeben)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das folgende ganzzahlige Problem P:

$$x_1 + 2x_2 \to \max!$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{u.d.N.} & x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

(a) Bestimmen Sie **grafisch** eine optimale Lösung der LP-Relaxation mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ und die zugehörige obere Schranke UB für das Problem P.

(b) Betrachten Sie den **rechten** Knoten u bei Verzweigung der Wurzel bzgl. der Variablen x_1 gemäß Verfahren von Dakin (d.h. die ausgewählte Variable darf einen Mindestwert nicht unterschreiten). Formulieren Sie die für den Knoten u resultierende LP-Relaxation $P^*(u)$ und stellen Sie das Anfangstableau für die Anwendung des Simplexalgorithmus auf. Welche Variablen würden im ersten Simplexschritt ausgetauscht werden (ein weiteres Tableau ist **nicht** erforderlich)?

(c) Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung in (a) alle Optimallösungen des ganzzahligen Ausgangsproblems P.

(d) Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung in (a) eine Optimallösung, wenn nur die Variable x_1 ganzzahlig sein muss.

(17 Punkte)

2. Gegeben sei das folgende (binäre) Rucksackproblem:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr} F = & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & 12x_6 & \to & \max! \\ \text{u.d.N.} & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & + & 8x_6 & \leq & 13 \end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \{0, 1\}$$

(a) Bestimmen Sie eine Näherungslösung $\mathbf{x^G}$ mittels Greedy-Algorithmus und den zugehörigen Zielfunktionswert f_G.

(b) Betrachten Sie nun die Zielfunktion $F^* = -F \to \min!$ Sei $\mathbf{x}^*$ der in einem Simulated Annealing erzeugte Nachbar von $\mathbf{x^G}$, bei dem die Variablen x_1, x_4 und x_5 den jeweils anderen Wert gegenüber $\mathbf{x^G}$ annehmen (die restlichen Variablen sind gleich). Mit welcher

Wahrscheinlichkeit wird $\mathbf{x}^*$ als Nachbar von $\mathbf{x}^{\mathbf{G}}$ akzeptiert, falls die aktuelle Temperatur $T = 2$ beträgt. Erzeugen Sie rechnerisch eine (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl z_1 gemäß

$$z_1 = (127z_0 + 417) \bmod 511, \qquad z_0 = 103.$$

Wird $\mathbf{x}^*$ unter Nutzung von z_1 als neue Startlösung bei Simulated Annealing akzeptiert?

(c) Überprüfen Sie, ob innerhalb der Reduzierung auf ein Kernproblem vor Anwendung eines Branch and Bound Verfahrens eine Fixierung für die Variable x_2 vorgenommen werden kann.

(14 Punkte)

3. Auf einer Maschine wird ein bestimmtes Erzeugnis hergestellt, wobei der Preis je Erzeugniseinheit 300 EUR beträgt. Zu Beginn jedes Jahres wird entschieden, ob die Maschine des Vorjahres weiterhin eingesetzt oder durch eine neue ersetzt wird. Es bezeichne x_j das Alter der eingesetzten Maschine am Ende von Jahr $j-1$ (oder gleichbedeutend am Beginn von Jahr j vor einer möglichen Ersetzung der Maschine). In Abhängigkeit vom Alter t der Maschine (gemessen in Jahren zu Beginn des Jahres, wobei bei einer ersetzten Maschine $t = 0$ gilt) ergibt sich ein Jahresausstoß von $70 - 25t$. Eine neue Maschine kostet 12 000 EUR. Zu Beginn des Planungszeitraumes steht eine zwei Jahre im Einsatz befindliche Maschine (d.h. $x_1 = 2$) zur Verfügung. Aus technologischen Gründen kann die Maschine maximal drei Jahre im Einsatz sein. Für die ersten drei Jahre des Planungszeitraumes soll am Anfang jedes Jahres festgelegt werden, ob die Maschine ersetzt wird oder nicht. Dabei wird ein maximales Ergebnis (Preissumme vermindert um Kosten für neue Maschinen) angestrebt.

   (a) Stellen Sie grafisch die Steuer- und Zustandsbereiche dar.

   (b) Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert mittels dynamischer Optimierung.

   (9 Punkte)

4. In einem kleinen Call-Center arbeiten drei Angestellte, die Anrufe beantworten. Zusätzlich können zwei Anrufer in Warteleitungen verbleiben. Wenn alle fünf Leitungen belegt sind, hört der Anrufer das Besetztzeichen. Die Zwischenankunftszeit Z und die Bedienungszeit S seien exponentialverteilt. Es kommen durchschnittlich 21 Anrufe pro Stunde an, und die Bedienungszeit eines Anrufers beträgt im Mittel fünf Minuten. Betrachtet wird der Gleichgewichtsfall.

   Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeit P_0 und damit die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anrufer zunächst in einer der Warteleitungen verbleibt.

   (10 Punkte)