

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- 2 A4 Blätter (mit Materialien aus den Lehrveranstaltungen; diese Blätter dürfen keine durchgerechneten Übungsaufgaben, Zahlenbeispiele aus der Vorlesung bzw. alte Klausuraufgaben enthalten; bitte die Blätter mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen und zusammen mit der Klausur abgeben)
- Taschenrechner (laut Vorgaben des Prüfungsausschusses der FWW)

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

**Aufgabenstellung:**

1. Gegeben sei das folgende gemischt-ganzzahlige Problem:

$$\begin{aligned}
 & x_1 + 2x_2 \rightarrow \max! \\
 \text{u.d.N. } & -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ ganzzahlig}
 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie grafisch die optimale Lösung  $\mathbf{x}^{\text{LP}}$  der LP-Relaxation und deren Funktionswert  $f^{\text{LP}}$  sowie eine optimale Lösung  $\mathbf{x}^{\text{GG}}$  des gegebenen gemischt-ganzzahligen Problems und deren Funktionswert  $f^{\text{GG}}$ .

(b) Betrachten Sie den **rechten** Knoten  $u$  bei Verzweigung der Wurzel (LP-Relaxation) bzgl. der die Ganzzahligkeitsforderung verletzenden Variablen gemäß Verfahren von Dakin (d.h. die ausgewählte Variable darf einen Mindestwert nicht unterschreiten). Formulieren Sie die für den Knoten  $u$  resultierende LP-Relaxation  $P^*(u)$  und stellen Sie das Anfangstableau für die Anwendung des Simplexalgorithmus auf.

(c) Welche Variablen würden im ersten Simplexschritt ausgetauscht werden, und welcher Zielfunktionswert ergäbe sich nach dem ersten Austauschschritt (ein weiteres Tableau ist **nicht** erforderlich)?

**(13 Punkte)**

2. Gegeben sei das folgende ganzzahlige (nichtlineare) Optimierungsproblem:

$$x_1 x_2 x_3 + 4x_4(x_5)^2 + x_2(x_6)^2 \rightarrow \max!$$

u.d.N.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 & \leq 10 \\
 x_4 \cdot x_5 & \leq 12 \\
 (x_3)^2 + x_6 & \leq 22 \\
 x_1, \dots, x_6 & \in \mathbb{Z}_+
 \end{aligned}$$

In einem genetischen Algorithmus bezeichne das  $i$ -te Gen den Wert der Variablen  $x_i$ . Seien  $x^1 = (3, 2, 4, 5, 2, 6)^T$  und  $x^2 = (4, 3, 3, 4, 3, 4)^T$  die ausgewählten Eltern. Zur Erzeugung

der Nachkommen wird zunächst ein (3,5)-Crossover und danach als Mutationen im ersten Chromosom (resultierend aus  $x^1$ ) die fünfte Komponente um 1 vergrößert und im zweiten Chromosom die zweite Komponente um 1 verkleinert sowie die vierte Komponente um 1 vergrößert. Wählen Sie aus den zwei Eltern und den zwei erzeugten Nachkommen die zwei zulässigen Chromosomen mit der besten Fitness aus.

**(11 Punkte)**

3. Gegeben sei das folgende binäre Rucksackproblem:

$$\begin{aligned} F &= ax_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max! \\ \text{u.d.N.} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

wobei  $a \in \mathbb{Z}_+$  ein ganzzahliger Parameter ist.

(a) Bestimmen Sie für  $a = 2$  den Funktionswert  $f^G$  der Greedy-Lösung sowie den optimalen Funktionswert  $f^{LP}$  der LP-Relaxation.

(b) Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{Z}_+$  mittels **dynamischer Optimierung**.

(c) Für welchen Wert von  $a \in \mathbb{Z}_+$  ist die optimale Lösung nicht eindeutig bestimmt? Geben Sie für diesen Fall **alle** optimalen Lösungen an.

**(12 Punkte)**

4. Eine Autovermietung hat zu entscheiden, in welcher von zwei möglichen Reparaturwerkstätten ihre Wagen gewartet werden sollen. Sie schätzt, dass jede Stunde ein Wagen zur Wartung eintrifft. In der ersten Werkstatt bestehen zwei parallele Wartungsstationen, von denen jede durchschnittlich 40 Minuten pro Wartung benötigt. In der zweiten Werkstatt besteht eine modernere Wartungsstation mit einer durchschnittlichen Abfertigungszeit von 24 Minuten pro Wagen.

(a) Bestimmen Sie die erwarteten Verweilzeiten  $W$  in der jeweiligen Werkstatt für beide Varianten.

(b) Angenommen, jede Minute, die ein Wagen in der Wartung (d.h. in der Werkstatt) verbringt, verringert den Gewinn der Autovermietung um 2 EUR. Seien  $C_1$  und  $C_2$  die Kosten pro Minute Wartungszeit in den Werkstätten 1 bzw. 2. Geben Sie für beide Werkstätten  $i$  die Summe von Wartungskosten und Gewinnverringerung in Abhängigkeit von  $C_i$  an ( $i = 1, 2$ ).

(c) Seien  $C_1 = 2$  EUR and  $C_2 = 3$  EUR. Welche Werkstatt sollte die Autovermietung wählen, wenn Wartungskosten und Gewinnverringerung berücksichtigt werden?

**(14 Punkte)**