Klausur: 20019 Operations Research **Wintersemester 2015/16**
Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- 2 A4 Blätter (mit Materialien aus den Lehrveranstaltungen; diese Blätter dürfen keine durchgerechneten Übungsaufgaben, Zahlenbeispiele aus der Vorlesung bzw. alte Klausuraufgaben enthalten; bitte die Blätter mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen und zusammen mit der Klausur abgeben)
- Taschenrechner (gemäß Richtlinien der FWW)

Die Aufgabenstellung umfasst 4 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

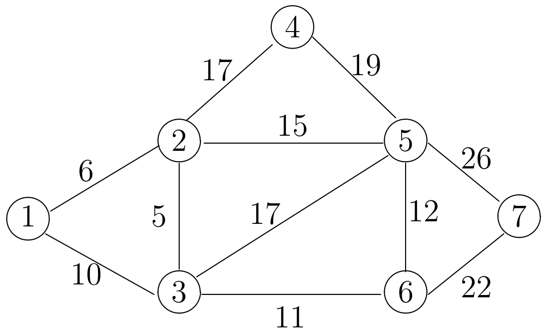
Aufgabenstellung:

1. Aus gegebenem Stangenmaterial der Länge 2000 mm sind mindestens 60 Stangen von 800 mm Länge und mindestens 30 Stangen von 650 mm Länge anzufertigen.

   (a) Geben Sie alle für die Optimierung relevanten Zuschnittvarianten an und formulieren Sie das entstehende Optimierungsproblem, wenn der beim Zerschneiden der Stangen resultierende Abfall möglichst gering sein soll!

   (b) Stellen Sie das Anfangstableau für die Anwendung des (primalen) Simplexalgorithmus auf und geben Sie die im ersten Austauschschritt auszutauschende Basis- und Nichtbasisvariable an (wenn als Pivotspalte diejenige mit dem kleinsten negativen Element der Zielfunktionszeile ausgewählt wird). Berechnen Sie die Werte der Basisvariablen nach dem ersten Austauschschritt gemäß Simplexalgorithmus (**nur diese Werte**).
   (12 Punkte)

2. Gegeben sei der folgende Graph mit den angegebenen Kantenbewertungen c_{ij} zwischen den Knoten i und j:



   (a) Bestimmen Sie mittels Algorithmus von Kruskal ein Minimalgerüst und dessen Gewicht $w(G)$. Wie groß darf c_{36} höchstens sein, damit die Kante [3,6] eindeutig in einem Minimalgerüst enthalten sein muss?

   (b) Betrachtet wird jetzt das Problem der Bestimmung eines Minimalgerüsts unter Nebenbedingungen, wobei zusätzlich folgende Restriktionen erfüllt sein müssen:
   b1) Der Knoten 5 muss mindestens mit einem der Knoten 2, 3, 4 oder 6 durch eine Kante direkt verbunden sein.
   b2) Die Kanten [3,6] und [5,6] dürfen nicht gleichzeitig im Gerüst enthalten sein.
   b3) Der Knoten 2 muss entweder mit Knoten 3 oder mit Knoten 4 durch eine Kante direkt verbunden sein.
   Geben Sie das Gewicht des zulässigen Gerüsts G^0 beschrieben durch die Kanten [1,2], [1,3], [2,4],

[2,5], [3,6], [5,7] an.

(c) Geben Sie alle (zulässigen und unzulässigen) Gerüste an, die aus G^0 durch Streichung der Kante [2,5] **(nur diese!)** und Aufnahme einer anderen Kante entstehen (es reicht aus, nur die jeweils neu aufzunehmende Kante zu nennen). Geben Sie für die dabei entstehenden zulässigen Gerüste jeweils das Gewicht an und bestimmen Sie unter diesen den besten Nachbarn G^*.

(d) Erzeugen Sie rechnerisch eine (0,1)-gleichverteilte Zufallszahl u_1 unter Nutzung des linearen Kongruenzgenerators

$$x_1 = (243x_0 + 10) \bmod (2^7), \qquad x_0 = 15.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der unter (c) ermittelte Nachbar G^* von G^0 als neue Startlösung bei Simulated Annealing akzeptiert, falls die aktuelle Temperatur $T = 3$ beträgt. Wird dieser Nachbar G^* von G^0 unter Nutzung der Zufallszahl u_1 akzeptiert?
(13 Punkte)

3. Drei Forschungsteams arbeiten an der Lösung einer Aufgabe, wobei die Wahrscheinlichkeiten eines Misserfolgs bei den einzelnen Teams mit 0,6; 0,5 bzw. 0,7 gegeben sind. Zur Erhöhung der Erfolgsaussichten sollen zwei weitere Mtarbeiter so eingesetzt werden, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Fehlschlags (d.h. kein Team löst die Aufgabe) minimal wird. Für das Rechnen mit den Wahrscheinlichkeiten wird angenommen, dass diese für den Misserfolg der einzelnen Teams unabhängig voneinander sind. Die Vorteile der erhöhten Mitarbeiterzahl sind durch die folgende Tabelle der Fehlschlagswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der zusätzlich zugeordneten Mitarbeiter gegeben:

zusätzliche Mitarbeiter	Team 1	Team 2	Team 3
0	0,6	0,5	0,7
1	0,45	0,4	0,6
2	0,35	0,3	0,4

(a) Bestimmen Sie den optimalen Zielfunktionswert und eine optimale Lösung mittels dynamischer Optimierung.

(b) Wie groß darf die Fehlschlagswahrscheinlichkeit für die Zuordnung von zwei Mitarbeitern zu Team 1 höchstens sein, damit in einer eindeutigen optimalen Lösung beide Mitarbeiter dem Team 1 zugeordnet werden (falls alle anderen Wahrscheinlichkeiten unverändert bleiben).
(12 Punkte)

4. In einer Werkstatt trifft im Mittel alle 30 Minuten ein Auftrag ein, und die Bearbeitung eines Auftrags dauert durchschnittlich 20 Minuten. Die Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten sind exponentialverteilt, und es wird der Gleichgewichtsfall betrachtet. In der Werkstatt können neben dem gerade in Arbeit befindlichen Auftrag vier weitere Werkstücke in einem Lagerraum gelagert werden, der Rest kann außerhalb der Werkstatt gelagert werden.

(a) Wie groß ist die mittlere Verweilzeit eines Auftrags in der Werkstatt?

(b) Wie groß ist der Anteil der Werkstücke, die mehr als 2,5 Stunden in der Werkstatt verweilen (also einschließlich Bearbeitung) und wie groß ist der Anteil der Werkstücke, die höchstens 45 Minuten auf den Bearbeitungsbeginn in der Werkstatt warten?

(c) Angenommen, es stehen keine Lagermöglichkeiten außerhalb der Werkstatt zur Verfügung. Bestimmen Sie für diesen Fall den Anteil der angenommenen Aufträge sowie den prozentualen Zeitanteil, in dem der Lagerraum leer ist.
(13 Punkte)