

# Klausur: Operations Research IV

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Semester: 5., 7., 9.

## Zugelassene Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner

Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muß ersichtlich sein!

## Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei  $a_{ij}$  die Auszahlung an Spieler 1 angibt bei Wahl der Strategie  $i$  und von Spieler 1 und Strategie  $j$  von Spieler 2.

- (a) Ist das Spiel ein Sattelpunktsspiel (Begründung)?
- (b) Eliminieren Sie dominierte Strategien!
- (c) Geben Sie optimale Strategien für beide Spieler an!
- (d) Wie lautet der Wert des Spiels?

2. Gegeben sei das Rucksackproblem

$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 10x_5 + 2x_6 + 8x_7 \rightarrow \max!$$

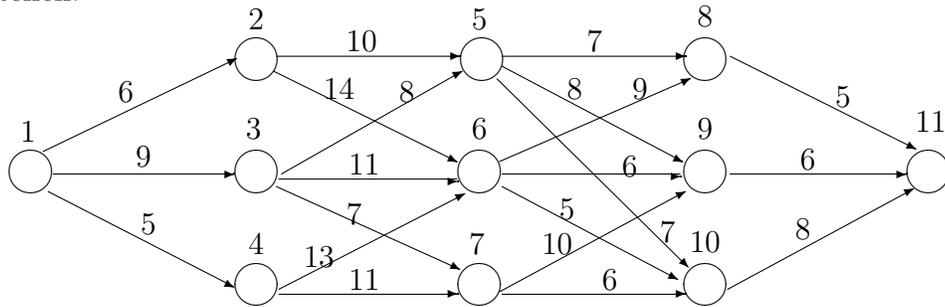
unter den Nebenbedingungen

$$7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 3x_6 + 5x_7 \leq V$$

$$x_1, \dots, x_7 \in \{0, 1\}$$

- (a) Bestimmen Sie für  $V = 17$  eine Näherungslösung mittels Greedy-Heuristik! Wie lautet der Zielfunktionswert dieser Lösung? Geben Sie eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des Problems mit Hilfe der Relaxation an, bei der die Ganzzahligkeitsforderungen  $x_i \in \{0, 1\}$  durch  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , ersetzt wurden!
- (b) Wie lautet die mittels Greedy-Heuristik erhaltene Lösung für  $V = 19$ ? Ist die Lösung in diesem Fall optimal?

3. Um von Ort (Knoten) 1 zum Ort (Knoten) 11 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten  $c_{ij}$  markiert, die die Kosten einer Reise vom Ort  $i$  zum Ort  $j$  angeben.

- Bestimmen Sie eine Reise von Ort 1 zu Ort 11 mit geringsten Gesamtkosten mittels dynamischer Optimierung!
  - Welche Route wählt der Reisende, wenn bei Ankunft im Ort 2 bekannt wird, daß die Verbindung zwischen den Orten 2 und 5 wegen Straßenbauarbeiten gesperrt ist?
  - Wie ändern sich die optimale Gesamtreise und deren Kosten gegenüber (a), wenn vor Beginn der Reise im Ort 1 bekannt wird, daß die Verbindung zwischen den Orten 2 und 5 gesperrt ist?
4. Gegeben sei ein Rundreiseproblem (TSP) mit  $n = 4$  Orten und der Entfernungsmatrix

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 7 \\ 5 & - & 9 & 6 \\ 8 & 9 & - & 12 \\ 7 & 6 & 12 & - \end{pmatrix},$$

wobei  $c_{ij}$  die Entfernung zwischen den Orten  $i$  und  $j$  mit  $i \neq j$  angibt.

- Bestimmen Sie mit dem Einfügeverfahren nach dem Prinzip der weitesten Einfügung (d.h. es wird als nächstes der Ort eingefügt, dessen kürzeste Entfernung zu einem in der Rundreise enthaltenen Ort maximal ist) eine Näherungslösung, wobei Ort 1 als Startort gewählt wird. Welche Länge hat die erhaltene Rundreise?
- Wird die unter (a) ermittelte Rundreise auch erhalten, wenn sich wegen einer Umleitung die Entfernung zwischen den Orten 1 und 3 von  $c_{13} = 8$  auf  $c_{13} = 11$  vergrößert und ebenfalls Ort 1 als Startort gewählt wird?

5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Bedingungen eine optimale Lösung des Optimierungsproblems

$$F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 - x_3} + e^{-x_2} \rightarrow \min!$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 - x_3 &\leq 0 \\ x_3 - 4 &\leq 0.\end{aligned}$$

Wie lautet der minimale Zielfunktionswert?