Klausur: Operations Research IV **Veranstaltungs-Nr.: 1129**

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner **Wintersemester 2001/02**

Als Hilfsmittel sind zugelassen:

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner

Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muß ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das folgende parametrische Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{rcrcl}
\multicolumn{5}{c}{z = (-2-t)x_1 + 2x_2 \rightarrow \max!} \\
-x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\
-2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\
\multicolumn{5}{c}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

   (a) Bestimmen Sie eine Optimallösung für $t = 0$!

   (b) Für welche reellen Werte vom Parameter t ist die unter (a) erhaltene Basislösung optimal?

   (c) Was läßt sich über die Optimallösung im Fall $t < -1$ aussagen?

   (8 Punkte)

2. Aus Rundeisenstangen der Länge $l = 20$ m sollen mindestens 4000 Stangen der Länge $l_1 = 9$ m, mindestens 5000 Stangen der Länge $l_2 = 8$ m sowie mindestens 3000 Stangen der Länge $l_3 = 6$ m hergestellt werden.

   (a) Ermitteln Sie die zu betrachtenden Zuschnittvarianten!

   (b) Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem für den Fall der Minimierung der Anzahl der benötigten 20 m - Stangen!

   (c) Erstellen Sie das Starttableau für die Anwendung des *dualen* Simplexalgorithmus und führen Sie *einen* Austauschschritt mittels dualem Simplexalgorithmus durch!

   (d) Wie lautet die Zielfunktion im Fall der Minimierung des entstehenden Abfalls?

   (9 Punkte)

3. Gegeben sei das Rucksackproblem

$$7x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 10x_6 + 3x_7 + x_8 \to \max!$$

unter den Nebenbedingungen

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 12x_5 + 8x_6 + 6x_7 + 3x_8 \leq V$$

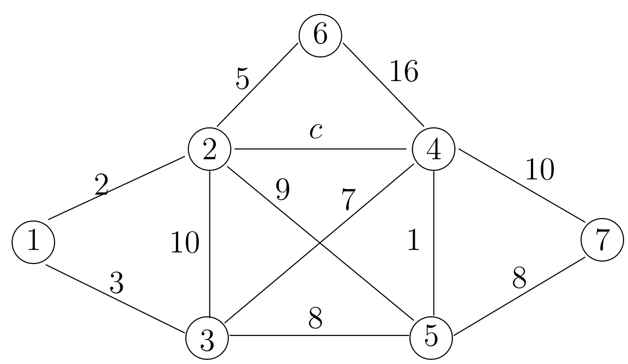
$$x_1, \ldots, x_8 \in \{0, 1\}$$

(a) Bestimmen Sie für $V = 28$ eine Näherungslösung mittels Greedy-Heuristik! Wie lautet der Zielfunktionswert dieser Lösung? Geben Sie eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des Problems mit Hilfe der Relaxation an, bei der die Ganzzahligkeitsforderungen $x_i \in \{0, 1\}$ durch $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, 8$, ersetzt wurden!

(b) Wird die unter (a) erhaltene Lösung mittels Greedy-Heuristik auch für $V = 29$ erhalten?

(7 Punkte)

4. 7 Orte sollen durch ein Pipelinesystem miteinander verbunden werden. Der folgende Graph gibt die möglichen Verbindungen zwischen zwei Orten (Knoten) an, und die Bewertung c_{ij} gibt die Kosten für eine direkte Verbindung zwischen den Orten i und j an:



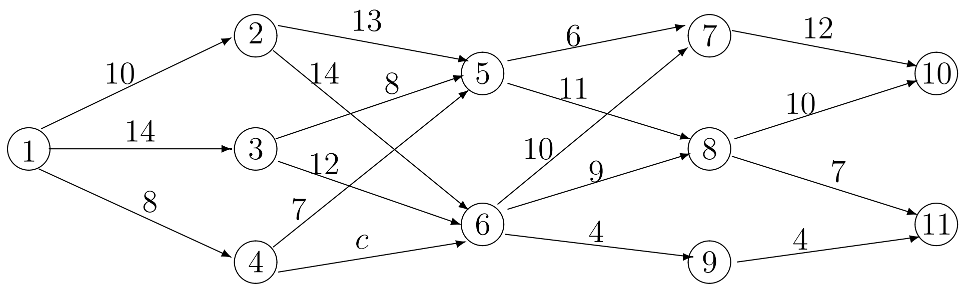
(a) Bestimmen Sie ein alle Orte verbindendes Pipelinesystem mit minimalen Gesamtkosten (d.h. bestimmen Sie ein Minimalgerüst des gegebenen Graphen) für $c_{24} = c \in \{6, 7, 8, 9\}$?

(b) Geben Sie die optimalen Gesamtkosten an!

(c) Für welche der vier Werte von c ist das Minimalgerüst eindeutig bestimmt?

(6 Punkte)

5. Um von Ort (Knoten) 1 zu den Orten (Knoten) 10 bzw. 11 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten c_{ij}, die die Entfernung vom Knoten i zum Knoten j angeben, markiert.

(a) Bestimmen Sie einen Weg minimaler Länge vom Ort 1 zum Ort 10 sowie vom Ort 2 zum Ort 11 (gegebenenfalls in Abhängigkeit vom Wert c des Parameters c_{46})!

(b) Ist der kürzeste Weg zwischen den Orten 1 und 10 für alle Werte von c eindeutig bestimmt?

(c) Angenommen, durch Straßenneubau verkürzt sich die Entfernung vom Ort 1 zum Ort 3 von $c_{13} = 14$ auf $c_{13}^* = 5$. Für welche Werte von c verläuft in diesem Fall ein kürzester Weg vom Ort 1 zum Ort 10 durch den Ort 6 ?

(10 Punkte)

6. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$F(x, y) = x^2 + x + 2y^2 - 2y \to \min!$$

unter der Nebenbedingung

$$2x \ + \ y \ \geq \ 4.$$

Verwenden Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen zur Herleitung einer optimalen Lösung! Warum ist die erhaltene Lösung global optimal ? Wie lautet der optimale Zielfunktionswert?

(10 Punkte)