Klausur: 1129 Operations Research **Wintersemester 2003/04**

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner
- für ausländische Studenten Wörterbuch

Die Aufgabenstellung umfaßt 6 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muß ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Überprüfen Sie, ob das Problem

$$F(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{x_2 + 1} \rightarrow \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0$$

ein konvexes Optimierungsproblem ist.

(5 Punkte)

2. Gegeben sei das Problem

$$F(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + x_2^3 \rightarrow \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0.$$

Ermitteln Sie eine Lösung der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen und den zugehörigen Zielfunktionswert. Kann man schlußfolgern, daß die Lösung global optimal ist?

(10 Punkte)

3. Gegeben sei das Problem

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1 + 12x_2 - 2x_1x_2 \rightarrow \min!$$

(a) Zeigen Sie, daß Funktion F konvex ist.

(b) Führen Sie ausgehend von der Startlösung $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (0,0)^T$ **eine** Iteration des Gradientenverfahrens durch.

(b) Lösen Sie **grad** $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ direkt, um die exakte Lösung zu bestimmen.

(9 Punkte)

4. Im Zusammenhang mit der möglichen Einführung von zwei neuen Produkten soll ermittelt werden, ob bzw. mit welchem Mix die neuen Produkte hergestellt werden sollen. Das Management möchte einen jährlichen Mindestgewinn sowie die Einhaltung eines Investitionsbudgets für die neuen Maschinen berücksichtigen. Es wurden die folgenden Anspruchsniveaus (Goals) spezifiziert:
(1) die Erzielung eines jährlichen Gewinns von mindestens 30 Mill. EUR,
(2) eine Investitionshöhe von höchstens 25 Mill. EUR.
Für die Unterschreitung des Gewinnziels sind für jede Million EUR, die zuwenig erwirtschaftet wird, fünf Strafpunkte anzusetzen. Bei einer Überschreitung des Investitionsziels wird jede Million EUR, die zuviel benötigt wird, mit zwei Strafpunkten bewertet.

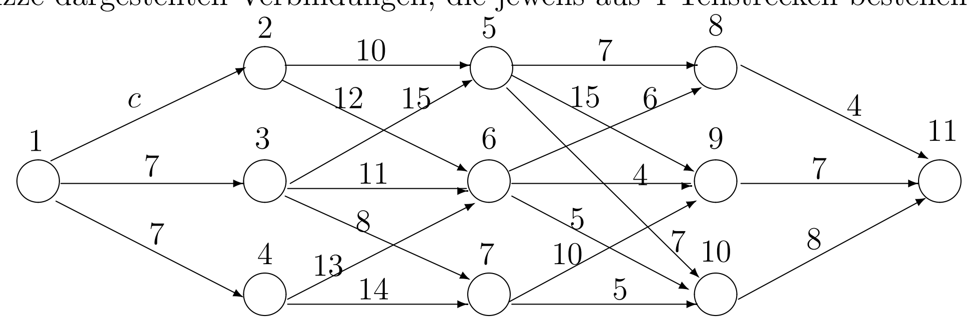
   Der jährliche Gewinnbeitrag der neuen Produkte und die erforderlichen Investitionsmittel verhalten sich proportional zur produzierten Menge x_i (in Tonnen) für Produkt $i (i = 1, 2)$. In der folgenden Tabelle sind die Zielbeiträge je Tonne sowie die Goals und Strafpunkte zusammengestellt.

	Zielbeitrag pro Tonne Produkt				
Faktor	1	2	Goal	(Einheit)	Strafpunkte
jährlicher Gewinn	4	3	≥ 30	(Mill. EUR)	5
Investitionshöhe	5	4	≤ 25	(Mill. EUR)	2

   Außerdem soll die Summe der produzierten Mengen beider Produkte 7 Tonnen nicht überschreiten. Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem mittels Goal-Programming Ansatz, wobei die Gesamtanzahl der Strafpunkte zu minimieren ist und ermitteln Sie eine optimale Lösung.

   (7 Punkte)

5. Um von Ort (Knoten) 1 zum Ort (Knoten) 11 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



   Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten c_{ij} markiert, die die Fahrzeiten einer Reise vom Ort i zum Ort j angeben.

   (a) Bestimmen Sie die kleinste Gesamtfahrzeit von Ort 1 zu Ort 11 in Abhängigkeit vom Parameter $c_{12} = c$ mittels dynamischer Optimierung (die Umsteigezeiten in jedem Knoten werden als konstant angesehen und daher vernachlässigt). Geben Sie für $c_{12} = c = 5$ eine Route mit kleinster Gesamtfahrzeit an.

(b) Für welche Werte $c_{12} = c \in \{6, 7, 8\}$ ist die optimale Route mit kleinster Gesamtfahrzeit eindeutig bestimmt?

(c) Sei $c_{12} = c = 10$ und außerdem seien die Verbindungen von Ort 3 zu den Orten 6 und 7 wegen Bauarbeiten gesperrt. Wie lautet die optimale Route in diesem Fall?

(10 Punkte)

6. Zwei Spieler legen jeder eine Münze verdeckt auf den Tisch. Nach Offenlegen der Münzen soll je nach ihrer Lage (Kopf oder Zahl nach oben) die Auszahlung für Spieler 1 nach folgendem Schema erfolgen:

		Spieler 2	
		Kopf (y_1)	Zahl (y_2)
Spieler 1	Kopf (x_1)	$\frac{1}{2}$	0
	Zahl (x_2)	- $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(a) Ist das Spiel ein Sattelpunktsspiel (Begründung)?

(b) Ermitteln Sie **rechnerisch** optimale Strategien für beide Spieler!

(c) Ist das Spiel fair?

(9 Punkte)