Klausur: 1129 Operations Research **Wintersemester 2004/05**

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner
- für ausländische Studenten Wörterbuch

Die Aufgabenstellung umfaßt 6 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muß ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das Problem

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array}$$

(a) Verwenden Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen, um zu zeigen, daß der Punkt $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **keine** Optimallösung ist.

(b) Ermitteln Sie eine Lösung der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen.

(c) Kann man schlußfolgern, daß die unter (b) erhaltene Lösung global optimal ist?

(10 Punkte)

2. Gegeben sei das Problem

$$F(x, y) = -\ln(1 + 2x) + y^2 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcl} (x-1)^2 & + & y^2 & \leq & 1 \\ x^2 & + & 2xy & \leq & 2 \end{array}$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Zielfunktion und die beiden Restriktionsfunktionen konvex bzw. streng konvex sind.

(b) Erfüllt das Problem die Slaterbedingung (Begründung)?

(6 Punkte)

3. Gegeben sei das Problem

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_2 \to \min!$$

(a) Führen Sie ausgehend von dem Startpunkt $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ **eine** Iteration des Gradientenverfahrens durch.

(b) Ist der Punkt $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (1, 2)$ globaler Minimalpunkt (Begründung)?

(8 Punkte)

4. Gegeben sei das Rucksackproblem

$$7x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 6x_4 \rightarrow \max!$$

u.d.N.

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq V$$
$$x_1, \ldots, x_4 \in \{0, 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung für $V = 11$ mittels dynamischer Optimierung.

(b) Für welche Werte V mit $0 < V \leq 11$ ist die optimale Lösung **nicht** eindeutig bestimmt.

(c) Ist für $V = 11$ der Gegenstand 1 in einer optimalen Rucksackfüllung enthalten, falls Gegenstand 1 statt wie bisher $a_1 = 5$ jetzt $a_1^* = 7$ Volumeneinheiten im Rucksack benötigt (und alle anderen Daten unverändert sind)?

(8 Punkte)

5. Betrachtet wird ein $(2, 4)$-Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} die Auszahlung an Spieler 1 angibt, wenn Spieler 1 die Strategie i und Spieler 2 die Strategie j wählt.

(a) Ist das Spiel ein Sattelpunktsspiel (Begründung)?

(b) Ermitteln Sie **graphisch** optimale Strategien für beide Spieler. Ist das Spiel fair?

(8 Punkte)

6. Gegeben sei das folgende lineare Vektormaximumproblem:

$$\begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{“max!”}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 28 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Ermitteln Sie **graphisch** die individuell optimalen Lösungen sowie die Menge M_E aller effizienten Lösungen. Wie lautet der ideale Zielwertvektor?

(b) Ermitteln Sie **rechnerisch** eine Optimallösung für das Kompromißmodell mit der Zielfunktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = 3z_1(\mathbf{x}) + z_2(\mathbf{x}) \rightarrow \max!$$

Ist die Optimallösung eindeutig bestimmt?

(c) **Formulieren** Sie das aus dem gegebenen Vektormaximumproblem resultierende Kompromißmodell für die Minimierung der maximalen Abweichung vom individuellen Optimum $\overline{z}_q,\ q \in \{1, 2\}$, als **lineares** Optimierungsproblem.

(10 Punkte)