**Klausur: 2357 Operations Research** **Wintersemester 2005/06**

**Prüfer: Prof. Dr. F. Werner**

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfaßt 5 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muß ersichtlich sein!

**Aufgabenstellung:**

1. Gegeben sei das Problem

$$F(x,y,z) = -27x + x^2 - 45y + 2y^2 + 10z - 4 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & \leq & 0 \\ & & & & z & \leq & 17,25 \end{array}$$

(a) Ermitteln Sie **alle** Lösungen der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen.

(b) Kann man schlußfolgern, daß eine Lösung der KKT-Bedingungen global optimal ist?

**(11 Punkte)**

2. (a) Gegeben sei das Problem

$$F(x_1,x_2) = -2x_1 + x_1^2 + 6x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 \to \min!$$

Führen Sie ausgehend von dem Startpunkt $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (0,-1)$ **eine** Iteration des Gradientenverfahrens durch.

(b) Gegeben ist das Problem

$$f(x) = \max\left\{-\frac{x}{2} + 1,\ e^{2x-1}\right\} \to \min!$$

Begründen Sie kurz, warum die Funktion $f$ unimodal ist. Führen Sie **eine** Iteration des Verfahrens des goldenen Schnittes mit dem Startintervall $[a_1, b_1] = [0,1]$ aus (mit 3 Dezimalstellen) und geben Sie an, welches Intervall $[a_2, b_2]$ für die zweite Iteration benutzt wird.

**(10 Punkte)**

3. Gegeben sei das Rucksackproblem

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 \to \max!$$

u.d.N.

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq V$$

$$x_1, \ldots, x_4 \in \{0,1\}.$$

(a) Bestimmen Sie für $V = 10$ den optimalen Zielfunktionswert sowie alle optimalen Lösungen mittels dynamischer Optimierung.

(b) Angenommen der Wert des Gegenstandes 1 vergrößert sich von 3 auf $c_1 = 6$. Welche Lösungen sind dann optimal?

**(9 Punkte)**

4. Betrachtet wird ein $(2,3)$-Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 2 \\ 3 & 1,5 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a_{ij}$ die Auszahlung an Spieler 1 angibt, wenn Spieler 1 die Strategie $i$ und Spieler 2 die Strategie $j$ wählt.

(a) Ist das Spiel ein Sattelpunktsspiel (Begründung)?

(b) Ermitteln Sie **grafisch** optimale Strategien für beide Spieler sowie den Wert des Spiels.

(c) Ändern Sie maximal zwei Elemente der Matrix $A$, so daß das resultierende Matrixspiel ein Sattelpunktsspiel charakterisiert.

**(9 Punkte)**

5. Gegeben sei das folgende lineare Vektormaximumproblem:

$$\begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{“ max!”}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

(a) Ermitteln Sie **grafisch** die individuell optimalen Lösungen, bestimmen Sie die individuell optimalen Zielfunktionswerte sowie die Menge $M_E$ aller effizienten Lösungen.

(b) Ermitteln Sie **grafisch** die individuell optimalen Lösungen, bestimmen Sie die individuell optimalen Zielfunktionswerte sowie die Menge $M_E$ aller effizienten Lösungen, wenn in dem angegebenen Problem die Zielfunktion $z_1(\mathbf{x})$ durch

$$z_1^*(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2$$

ersetzt wird.

(c) Wie lautet das zugehörige Goal Programm bzgl. der Zielfunktionen $z_1^*(\mathbf{x})$ und $z_2(\mathbf{x})$, wenn eine zulässige Lösung bzgl. $z_1^*$ einen Wert von 31 und bzgl. $z_2$ einen Wert von 16,5 erreichen soll und die Unterschreitung von $z_1^*$ mit einem und von $z_2$ mit zwei Punkten je Einheit bestraft werden. Stellen Sie das Anfangstableau für den Simplexalgorithmus auf.

**(11 Punkte)**