Klausur: 2357 Operations Research **Sommersemester 2007**

Prüfer: Prof. Dr. F. Werner

Zugelassene Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript (ohne gelöste Übungsaufgaben)
- Taschenrechner

Die Aufgabenstellung umfasst 6 Aufgaben, die alle zu bearbeiten sind. Die Angabe des Resultats allein ist nicht ausreichend. Der Rechenweg zum Erhalt der Lösung muss ersichtlich sein!

Aufgabenstellung:

1. Gegeben sei das Problem

$$F(x,y,z) = 150 - e^{-x} - e^{-y} - e^{-z} \to \max!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & \leq & u \\ & & & & x & \leq & v, \end{array}$$

wobei $u, v \in \mathbb{R}$ Parameter sind.

(a) Stellen Sie die Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingungen auf.

(b) Erfüllt der Punkt $(x^*, y^*, z^*) = (\frac{1}{3}\,u, \frac{1}{3}\,u, \frac{1}{3}\,u)$ die KKT-Bedingungen im Fall $u < 3v$.

(c) Bestimmen Sie eine Lösung der KKT-Bedingungen für den Fall $u \geq 3v$.

(9 Punkte)

2. Gegeben sei das quadratische Optimierungsproblem

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1x_3 - 8x_2 - 2x_3 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Formulieren Sie das beim Verfahren von Wolfe zu lösende Optimierungsproblem (für die konkreten Daten des Beispiels) und stellen Sie das **Anfangstableau** auf.

(4 Punkte)

3. Gegeben sei das Problem

$$f(x) = \max\left\{2 - \frac{x^2}{4},\ e^{x/2} - \frac{x}{4}\right\} \to \min!$$

wobei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

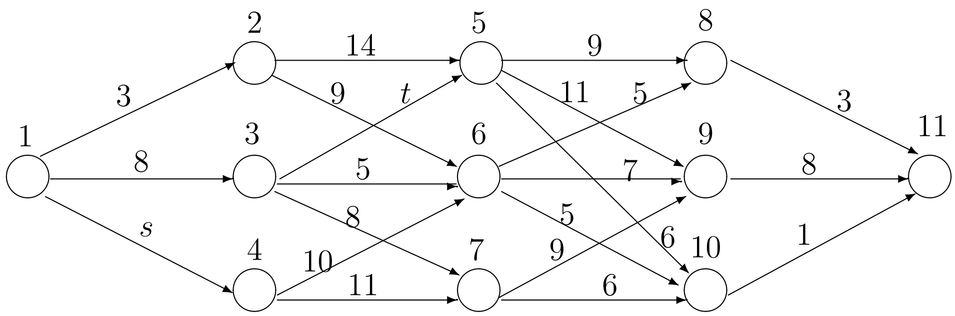
(a) Ist die Funktion f unimodal?

(b) Begründen Sie, warum die Lösung des Problems im Intervall $[1, 2]$ liegt.

(c) Führen Sie **eine** Iteration des Verfahrens des goldenen Schnittes mit dem Startintervall $[a_1, b_1] = [1, 2]$ aus (mit 3 Dezimalstellen) und geben Sie an, welches Intervall $[a_2, b_2]$ für die zweite Iteration benutzt wird.

(5 Punkte)

4. Um von Ort (Knoten) 1 zum Ort (Knoten) 11 zu gelangen, gibt es die in der folgenden Skizze dargestellten Verbindungen, die jeweils aus 4 Teilstrecken bestehen:



Die Knoten sind mit den Orten und die Bögen mit den Werten c_{ij} markiert, die die Fahrzeiten einer Reise vom Ort i zum Ort j angeben.

(a) Bestimmen Sie die kleinste Gesamtfahrzeit von Ort 1 zu Ort 11 in Abhängigkeit von den Parametern $c_{14} = s$ und $c_{35} = t$ mittels dynamischer Optimierung (die Umsteigezeiten in jedem Knoten werden als konstant angesehen und daher vernachlässigt).

(b) Für welche Werte $s \in \{1, 2, 3\}$ und $t \in \{2, 3\}$ ist die Strecke mit der kürzesten Fahrzeit **eindeutig** bestimmt (Angabe der Lösungen ist nicht erforderlich)?

(c) Geben Sie für $s = t = 3$ **alle** Strecken mit kürzester Fahrzeit an.

(d) Seien $s = 3$ und $t = 2$. Unmittelbar **nach** Abfahrt im Ort 1 wird bekannt, dass die Strecke vom Ort 5 zum Ort 10 gesperrt ist. Welche Strecke wählt der Reisende jetzt, um möglichst schnell zum Ort 11 zu gelangen?

(11 Punkte)

5. Betrachtet wird ein $(2, 4)$-Matrixspiel mit der Auszahlungsmatrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -0,25 & -3 \\ 0 & 1 & 0,75 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} die Auszahlung an Spieler 1 angibt, wenn Spieler 1 die Strategie s_i und Spieler 2 die Strategie t_j wählt.

(a) Ist das Spiel ein Sattelpunktsspiel (Begründung)?

(b) Ermitteln Sie **grafisch** optimale Strategien für beide Spieler sowie den Wert des Spiels.

(c) Ist die optimale Strategie für Spieler 2 eindeutig bestimmt? Falls nicht, geben Sie (unter Nutzung des grafischen Lösungsverfahrens) eine weitere optimale Verhaltensweise für beide Spieler an.

(10 Punkte)

6. Gegeben sei das folgende lineare Vektormaximumproblem:

$$\begin{pmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{“ max!”}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 13 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 45 \\ & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Ermitteln Sie **grafisch** die individuell optimalen Lösungen, bestimmen Sie die individuell optimalen Zielfunktionswerte sowie die Menge M_E aller effizienten Lösungen.

(b) Wie lautet das zugehörige Goal Programm, wenn eine zulässige Lösung bzgl. z_1 einen Wert von mindestens 11 und bzgl. z_2 einen Wert von mindestens 10 erreichen soll und die Unterschreitung von z_1 mit drei Punkten und von z_2 mit einem Punkt je Einheit bestraft werden.

(c) Formulieren Sie für das betrachtete Beispiel das resultierende lineare Optimierungsproblem, wenn die maximale Abweichung vom individuellen Optimum minimiert werden soll und stellen Sie das **Anfangstableau** für die Anwendung des Simplexalgorithmus auf.

(11 Punkte)