УДК 519.8

МИНИМИЗАЦИЯ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ В ОБСЛУЖИВАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПРИБОРАМИ И ДОПУСТИМЫМИ ПРЕРЫВАНИЯМИ

С.А. Кравченко[1], Ф. Вернер[2]
[1]ОИПИ НАН Беларуси, Минск;
[2]Университет Магдебурга, Германия

Рассматривается следующая задача. Совокупность требований необходимо обслужить на множестве приборов. Каждый прибор имеет заданную скорость обслуживания и способен обслуживать не более одного требования одновременно. В процессе обслуживания допускаются прерывания, т. е. в любой момент времени обслуживание может быть прервано и продолжено позднее, возможно, на другом приборе. Необходимо организовать процесс обслуживания таким образом, чтобы минимизировать заданную выпуклую сепарабельную функцию. Предлагается математическая модель для решения данной задачи.

Исследуемая задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется n требований и m приборов. Для каждого требования J_j, $j=1,\ldots,n$, задано время обслуживания $p_j=p$. Для каждого прибора $M_q, q=1,\ldots,m$, задан коэффициент s_q, характеризующий скорость обслуживания, т. е. обслуживание требования J_j на приборе M_q требует p/s_q единиц времени. Любой прибор может выполнять не более одного требования в каждый момент времени. При обслуживании требований допускаются прерывания, т. е. выполнение любого требования можно прервать в любой момент и возобновить позже на любом приборе. Пусть f_j, где $j=1,\ldots,n$, означает выпуклую неубывающую функцию, такую, что все функции f_i-f_j являются монотонными. Задача заключается в построении расписания, минимизирующего значение $\sum_{j=1}^{n} f_j(C_j(s))$. Здесь $C_j(s)$ обозначает время завершения обслуживания требования J_j при расписании s. Далее вместо $C_j(s)$ будем писать C_j, если понятно, о каком расписании идет речь. Описанная задача обозначается $Q\,|\,p_j=p, pmtn\,|\sum f_j$, далее показано, что она сводится к задаче минимизации выпуклой сепарабельной функции при линейных ограничениях. Такое представление можно использовать для разработки полиномиальных алгоритмов для решения задач $Q\,|\,p_j=p, pmtn\,|\sum T_j$ и

$Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum w_j C_j$, где $T_j(s) = \max\{0, C_j(s) - d_j\}$ обозначает запаздывание требования J_j по отношению к его директивному сроку d_j.

Для задачи $Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum f_j$ предполагается, что все требования перенумерованы таким образом, что для любой пары требований J_i и J_j функция $f_j - f_i$ является неубывающей для $i < j$.

Утверждение. *Для задачи $Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum f_j$, где для любой пары требований J_i и J_j, $i < j$, следует, что $f_j - f_i$ – неубывающая функция и все f_j – выпуклые неубывающие функции, оптимальное расписание можно найти в классе расписаний, для которых выполняется $C_1 \le \ldots \le C_n$.*

Далее рассматриваются лишь расписания, для которых справедливо $C_1 \le \ldots \le C_n$. Пусть выбрано упорядоченное множество точек $b_1 < \ldots < b_z$; $b_0 = 0$ и выполняется $b_z < b_{z+1} = n \cdot p$, т. е. $[b_0, b_{n+1}]$ представляет собой промежуток времени, в котором должны обслуживаться все требования. Понятно, что оба множества точек $\{b_0, \ldots, b_{z+1}\}$ и $\{C_1, \ldots, C_n\}$ определяют разбиение на временном интервале. В случае, когда оба множества однозначно определены, оптимальное расписание можно найти, используя сетевое представление задачи [5]. Для каждого требования $j \in \{1, \ldots, n\}$, определяется время его «завершения» в каждом интервале $[b_i, b_{i+1}]$.

Для каждого требования J_j с $j = 1, \ldots, n$ и для каждого интервала $[b_i, b_{i+1}]$ с $i = 0, \ldots, z$ определяется переменная C_j^i, такая, что если часть требования J_j обслуживается в интервале $[b_i, b_{i+1}]$, то эта часть обрабатывается в интервале $\left[b_i, C_j^i\right]$ и в интервале $\left[C_j^i, b_{i+1}\right]$ требование J_j не обслуживается. Таким образом, если дано расписание s, можно положить

$$C_j^i = \begin{cases} C_j(s), \text{ если } b_i < C_j(s) < b_{i+1} \\ b_i, \text{ если } C_j(s) \le b_i \\ b_{i+1}, \text{ если } C_j(s) \ge b_{i+1} \end{cases}$$

для всех $j = 1, \ldots, n$, и $i = 0, \ldots, z$. Кроме того, выполняется $C_1^i \le \ldots \le C_n^i$.

Значение $\sum f_j$ можно подсчитать по формуле

$$f_j(C_j) = f_j(b_0) + \left(f_j(C_j^0) - f_j(b_0)\right) + \ldots + \left(f_j(C_j^z) - f_j(b_z)\right).$$

Действительно, пусть $C_j(s) \in [b_i, b_{i+1}]$. Тогда

$$f_j(C_j) = f_j(b_0) + \left(f_j(C_j^0) - f_j(b_0)\right) + \ldots + \left(f_j(C_j^{i-1}) - f_j(b_{i-1})\right) +$$
$$+ \left(f_j(C_j^i) - f_j(b_i)\right) + \left(f_j(C_j^{i+1}) - f_j(b_{i+1})\right) + \ldots + \left(f_j(C_j^z) - f_j(b_z)\right).$$

Поскольку $C_j^0 = b_1, \ldots, C_j^{l-1} = b_l$ и $C_j^{l+1} = b_l, \ldots, C_j^z = b_{z-1}$, получается

$$f_j(C_j) = f_j(b_0) + \left(f_j(b_1) - f_j(b_0)\right) + \ldots + \left(f_j(b_l) - f_j(b_{l-1})\right) +$$
$$+ \left(f_j(C_j(s)) - f_j(b_l)\right) + \left(f_j(b_{l+1}) - f_j(b_{l+1})\right) + \ldots + \left(f_j(b_z) - f_j(b_z)\right) =$$
$$= f_j(C_j(s)).$$

Итак, для каждого $i = 0, \ldots, n$ значения $b_i = C_0^i \le C_1^i \le \ldots \le C_n^i \le C_{n+1}^i = b_{i+1}$ определяют разбиение интервала $[b_i, b_{i+1}]$. С другой стороны, каждый интервал $\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]$ полностью определен выполняющимися в нем требованиями. Пусть $v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)$ определяет часть требования J_j, выполняющегося в интервале $\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]$ на приборе M_q, т. е. суммарное время выполнения требования J_j на приборе M_q в интервале $\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]$ равно $\dfrac{v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)}{s_q}$ и для любого требования J_j, выполняется равенство

$$\sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{z} v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) = p.$$

Значения C_k^i для $k = 0, \ldots, n+1$, $i = 0, \ldots, z$ и значения $v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)$ для $j = 1, \ldots, n$, $i = 0, \ldots, z$, $k = 0, \ldots, n+1$, $q = 1, \ldots, m$ определяют допустимое решение следующей задачи (ПП):

Найти минимум

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f_k(b_0) + \sum_{i=0}^{z} \left(f_k(C_k^i) - f_k(b_i)\right) \right)$$

при выполнении условий:

$$b_i = C_0^i \le C_1^i \le \ldots \le C_n^i \le C_{n+1}^i = b_{i+1}, \text{ для } i = 0, \ldots, z;$$

$$\sum_{q=1}^{m} \frac{v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)}{s_q} \le C_{k+1}^i - C_k^i, \text{ для } i = 0, \ldots, z,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n;$$

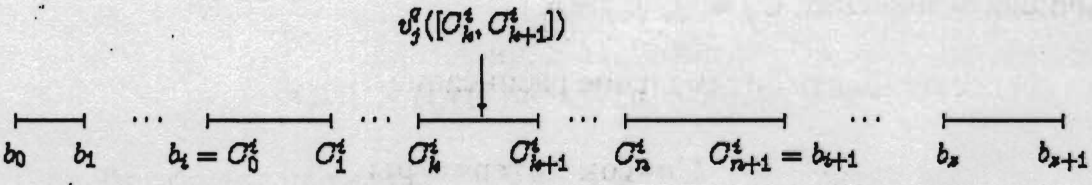
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)}{s_q} \le C_{k+1}^i - C_k^i, \text{ для } i = 0, \ldots, z,\ q = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{q=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{z} v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) = p, \text{ для } j = 1, \ldots, n;$$

$$C_k^i \ge 0, \text{ для } i = 0, \ldots, z,\ k = 0, \ldots, n;$$

$$v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) \geq 0, \text{ для } \; j = 1,\ldots,n, \; i = 0,\ldots,z, \; k = 0,\ldots,n, \; q = 1,\ldots,m.$$

Данная задача включает $O(m \cdot n^2 \cdot z)$ переменных и ограничений. Ниже приведено разбиение интервала $[b_i, b_{i+1}]$:



Отметим, что ограничение $b_i = C_0^i \leq C_1^i \leq \ldots \leq C_n^i \leq C_{n+1}^i = b_{i+1}$ возникает из-за условия $C_1 \leq \ldots \leq C_n$, а ограничение $\sum_{q=1}^{m} \frac{v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)}{s_q} \leq C_{k+1}^i - C_k^i$ – поскольку все части $v_j^1\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right), \ldots,$ $v_j^m\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)$ требования J_j должны быть обработаны в интервале $\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]$ на различных приборах.

Теорема 1. *Для любого допустимого расписания* s *задачи* $Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum f_j$, *в котором моменты завершения обслуживания требований* $C_1(s) \leq \ldots \leq C_n(s)$ *находятся в порядке, совпадающем с порядком соответствующих значений функций* $f_1(C_1(s)) \leq \ldots \leq f_n(C_n(s))$, *существует допустимое решение задачи ПП, такое, что выполняется равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j\left(C_j(s)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(f_k(b_0) + \sum_{i=0}^{z}\left(f_k(C_k^i) - f_k(b_i)\right)\right).$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Любое допустимое решение задачи ПП определяет допустимое расписание* s *для задачи* $Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum f_j$, *и при этом выполняется равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j\left(C_j(s)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(f_k(b_0) + \sum_{i=0}^{z}\left(f_k(C_k^i) - f_k(b_i)\right)\right).$$

В результате решения задачи ПП можно получить значения

$$C_1 = (C_1^0 - b_0) + \cdots + (C_1^z - b_z),$$

$$\ldots,$$

$$C_n = (C_n^0 - b_0) + \cdots + (C_n^z - b_z)$$

и, используя полученные значения, построить оптимальное расписание. Подобное построение описано в [5].

Итак, для решения задачи $Q \mid p_j = p, pmtn \mid \sum f_j$ необходимо:

1) решить соответствующую задачу ПП и для каждого требования J_j вычислить значения $C_j = \sum_{i=0}^{z} \left(C_j^i - b_i\right)$;

2) восстановить оптимальное расписание.

Список литературы

1. The complexity of mean flow time scheduling problems with release times / Ph. Baptiste [et al.] // J. of Scheduling. – 2007. – Vol. 10. – P. 139–146.

2. An O(n^2) algorithm for scheduling equal-length preemptive jobs on a single machine to minimize total tardiness / Z. Tian [et al.] // J. of Scheduling. – 2006. – Vol. 9. – P. 343–364.

3. Du, J. Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard / J. Du, J. Y.-T. Leung // Mathematics of Operations Research. – 1990. – Vol. 15. – P. 483–495.

4. Lawler, E.L. A 'pseudopolynomial' algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness / E.L. Lawler // Ann. Discrete Math. – 1977. – Vol. 1. – P. 331–342.

5. Preemptive scheduling of uniform machines subject to release dates / J. Labetoulle [et al.]; H.R. Pulleyblank (ed.) // Progress in Combinatorial Optimization. – 1984. – P. 245–261.