

Aufgaben zur Vorlesung “Ausgewählte Kapitel des Operations Research”

Serie 5

1. Gegeben sei das folgende lineare Vektormaximumproblem:

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{“max!”}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ermitteln Sie graphisch die individuell optimalen Lösungen sowie die Menge M_E aller effizienten Lösungen. Bestätigen Sie das erhaltene Resultat durch Lösung eines parametrischen Optimierungsproblems mittels Simplexalgorithmus.

2. Gegeben sei das Vektormaximumproblem

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{“max!”}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ordnen Sie den Zielfunktionen $z_q(x)$ die Zielgewichte $t_1^* = 5, t_2^* = 0,5$ und $t_3^* = 3$ zu und lösen Sie das entsprechende Kompromißprogramm!

3. Ein Unternehmen erwägt die Einführung von drei neuen Produkten als Ersatz für Modelle, die auslaufen sollen. Die OR-Abteilung wurde daher mit der Aufgabe betraut festzustellen, mit welchem Mix die neuen Produkte hergestellt werden sollen. Das Management möchte bei den langfristigen

Überlegungen vor allem drei Faktoren berücksichtigt haben: den langfristigen Gewinn, einen konstanten Personalbestand sowie die Einhaltung eines Investitionsbudgets für die neuen Maschinen. Es wurden die folgenden Anspruchsniveaus (Goals) spezifiziert:

- (1) die Erzielung eines langfristigen Gewinns aus den drei Produkten von mindestens 125 000 000 EUR,
- (2) die Beibehaltung des Personalbestandes von 4000 Beschäftigten und
- (3) eine Investitionshöhe von höchstens 55 000 000 EUR. Aller Voraussicht nach sind diese Goals nicht alle gleichzeitig zu erfüllen. In Absprache mit der OR-Abteilung wurden deshalb vom Management Prioritäten wie folgt festgelegt: Für die Unterschreitung des Gewinnziels sind für jede Million EUR, die zuwenig erwirtschaftet wird, 5 Strafpunkte anzusetzen. Eine Überschreitung des Beschäftigungsziels schlägt sich mit 2 Strafpunkten für jeweils hundert Beschäftigte zuviel nieder; eine Unterschreitung desselben Ziels ergibt 4 Strafpunkte. Bei einer Überschreitung des Investitionsziels wird jede Million EUR, die zuviel benötigt wird, mit 3 Strafpunkten bewertet.

Der Gewinnbeitrag der neuen Produkte, das zur Produktion notwendige Personal und die erforderlichen Investitionsmittel verhalten sich *proportional* zur angesetzten Produktionsrate. In der folgenden Tabelle sind die Zielbeiträge für eine Einheit der Produktionsrate sowie die Goals und Strafpunkte zusammengestellt.

Faktor	Zielbeitrag pro Einheit Produkt			Goal (Einheit)	Strafpunkte
	1	2	3		
Langfristiger Gewinn	12	9	15	≥ 125 (Millionen EUR)	5
Personalbestand	5	3	4	$= 40$ (Hundert Beschäftigte)	2(+), 4(-)
Investitionshöhe	5	7	8	≤ 55 (Millionen EUR)	3

Formulieren Sie das Optimierungsproblem mittels Goal-Programming Ansatz, wobei die Gesamtanzahl der Strafpunkte zu minimieren ist. Lösen Sie das resultierende lineare Optimierungsproblem mit der Simplexmethode!

4. Lösen Sie das lexikographische Goal-Programm

$$\begin{pmatrix} \phi_1(w(x)) \\ \phi_2(w(x)) \\ \phi_3(w(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^- \\ w_3^- \\ w_2^+ \end{pmatrix} \rightarrow \text{"lexmin!"}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 + x_3 & & & & = 10 \\ x_1 & & - w_1^+ + w_1^- & & = 8 \\ x_1 + x_2 & & & - w_2^+ + w_2^- & = 14 \\ 3x_2 & & & & - w_3^+ + w_3^- = 25 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, w_1^+, w_1^-, w_2^+, w_2^-, w_3^+, w_3^- \geq 0$$