Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. F. Werner

Aufgaben zur Vorlesung 'Operations Research'

Serie 1

1. Aus gegebenem Stangenmaterial der Länge 6500 mm sind mindestens 50 Stangen von 2000 mm Länge, 100 Stangen von 1600 mm Länge und 100 Stangen von 1100 mm Länge anzufertigen.
   (a) Geben Sie alle Zuschnittvarianten an!
   (b) Formulieren Sie das entstehende Optimierungsproblem, wenn die Anzahl zu zerschneidender Stangen möglichst gering sein soll!

2. Aus Blechen der Größe 1000 mm x 1000 mm sollen kleinere rechteckige Bleche T_1, T_2, T_3 mindestens in den Stückzahlen b_1, b_2, b_3 zugeschnitten werden, wobei

$$\begin{array}{ll} T_1 : 400 \text{ mm x } 400 \text{ mm}, & b_1 = 15 \\ T_2 : 300 \text{ mm x } 600 \text{ mm}, & b_2 = 10 \\ T_3 : 700 \text{ mm x } 300 \text{ mm}, & b_3 = \ \ 5 \end{array}$$

   (a) Geben Sie die möglichen Zuschnittvarianten an, wenn alle Bleche des gleichen Typs eine gleiche Lage innerhalb eines Bleches haben müssen (d.h. die Drehung eines Teils des Typs T_i um 90^0 ist nicht zulässig).
   (b) Formulieren Sie das entstehende Optimierungsproblem, wenn der entstehende Abfall minimiert werden soll.

3. Lösen Sie das folgende Problem grafisch:

$$z = 2x_1 + 5x_2 \to \max!$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{u.d.N.} & -5x_1 & + & 9x_2 & \leq & 36 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \ \text{ganzzahlig.}$$

4. Für das folgende Problem zeige man mittels grafischer Darstellung, dass keine ganzzahlige Lösung existiert:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max!$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{u.d.N.} & 2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 9 \\ & -2x_1 & + & 6x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & & & 4x_2 & \leq & 7 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \;\; \text{ganzzahlig}$$

Geben Sie die optimale nichtganzzahlige Lösung an.

5. Bestimmen Sie für das folgende lineare Optimierungsproblem grafisch eine optimale Lösung:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min!$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{u.d.N.} & 5x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Führen Sie danach nur für x_1, nur für x_2 sowie für beide Variable Ganzzahligkeitsbedingungen ein und vergleichen Sie die optimalen Lösungen.

6. Ein Unternehmen fertige zwei Produkte, die **alternativ** auf zwei Fertigungslinien hergestellt werden können. Technologie 1 sei durch die Restriktionen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

charakterisiert und Technologie 2 durch

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6, \end{array}$$

wobei $x_i \geq 0$ die produzierte Menge von Produkt $i, i \in \{1, 2\}$ (in Tonnen) angeben. Der Gewinn pro Tonne von Produkt 1 betrage 1000 EUR und der Gewinn pro Tonne von Produkt 2 betrage 2000 EUR.

(a) Formulieren sie ein mathematisches Modell.
(b) Stellen Sie den zulässigen Bereich grafisch dar.
(c) Bestimmen Sie grafisch eine optimale Lösung.

7. Für die Herstellung von zwei Produkten werden **genau** zwei von drei verfügbaren Anlagen mit unterschiedlicher Produktionscharakteristik benötigt. Alle

Anlagen stehen jeweils 36 Stunden zur Verfügung. Damit verbunden sind die folgenden Kapazitätsrestriktionen, die nicht alle gleichzeitig gelten:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{Anlage 1:} & 2x_1 & + & 6x_2 & \leq & 36 \\ \text{Anlage 2:} & 4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 36 \\ \text{Anlage 3:} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 36 \end{array}$$

Der zu maximierende Gewinn ist $3x_1 + 4x_2$, wobei $x_i \geq 0$ die hergestellte Menge von Produkt $i, i \in \{1, 2\}$ bezeichnet.

(a) Formulieren sie ein mathematisches Modell.
(b) Stellen Sie den zulässigen Bereich grafisch dar.
(c) Bestimmen Sie grafisch eine optimale Lösung.

8. Die Forschungsabteilung eines Unternehmens untersucht die Einführung von drei neuen Produkten, die in zwei möglichen Fabriken hergestellt werden können. Die zugehörigen Daten sind wie folgt gegeben:

	Produktionszeit (h) per Einheit von			verfügbare
	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Kapazität (h)
Fabrik 1	5	4	2	45
Fabrik 2	4	6	3	50
Gewinn pro Einheit	4	5	2	(in 1000 EUR)
maximale Anzahl zu verkaufender Einheiten	8	7	nicht beschränkt	

Das Management fordert:

- Höchstens zwei der drei neuen Produkte sollen ausgewählt werden.
- Genau eine der beiden Fabriken soll alle ausgewählten neuen Produkte herstellen.

Formulieren Sie ein mathematisches Modell für das resultierende Optimierungsproblem.