Fakultät für Mathematik
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. F. Werner

Aufgaben zur Vorlesung "Operations Research "

Serie 4

1. Betrachtet wird das folgende binäre Optimierungsproblem

$$4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 - x_6 + 7x_7 + 5x_8 \to \max!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrrcrrrrrcl} x_1 & + & 2x_2 & +x_3 & - & x_4 & +8x_5 & +x_6 & +4x_7 & +5x_8 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & x_2 & -x_3 & + & 6x_4 & +3x_5 & +x_6 & +3x_7 & +6x_8 & \leq & 13 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_8 \in \{0, 1\}$$

Die Startlösung sei jeweils $x = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

a) Bestimmen Sie ein lokales Maximum bzgl. N_1 mittels iterativer Verbesserung nach dem Prinzip der größten Verbesserung.

b) Bestimmen Sie ein lokales Maximum bzgl. N_1 mittels iterativer Verbesserung nach dem Prinzip der ersten Verbesserung.

2. Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem:

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max!$$

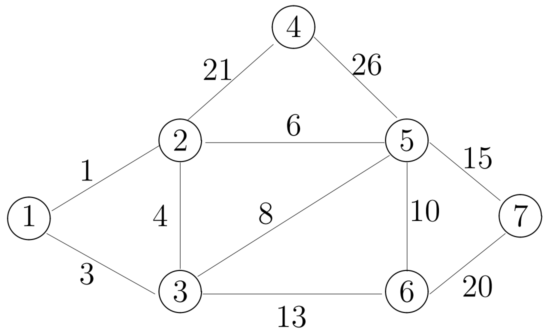
u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & \leq & 26 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 20 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{Z}_+$$

Die Startlösung sei $x = (2, 3, 1, 2)^T$. Bestimmen Sie die Anzahl der zulässigen Lösungen in der Nachbarschaft N_2 und den besten Nachbarn.

3. Gegeben sei der folgende Graph:



(a) Bestimmen Sie ein Minimalgerüst mittels Algorithmus von Kruskal.

(b) Gegeben sind zusätzlich folgende Restriktionen:

1) Kante [1,2] darf nur im Gerüst sein, wenn Kante [2,4] nicht im Gerüst ist.
2) Eine der Kanten [3,2], [3,5] oder [3,6] muss zum Gerüst gehören.
3) Die Kanten [5,7] und [3,6] gehören entweder beide zum Gerüst oder beide nicht zum Gerüst.

Bestätigen Sie, dass das Gerüst G beschreiben durch die Kanten [1,2], [1,3], [3,5], [4,5], [5,6], [6,7] zulässig ist und geben Sie das Gewicht an.

(c) Bestimmen Sie den besten Nachbarn von G in der Nachbarschaft N, wo zur Erzeugung eines Nachbarn genau eine Kante des Gerüsts durch eine andere Kante ersetzt wird.

4. Gegeben sei das folgende binäre Optimierungsproblem:

$$-5x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 - x_5 - 6x_6 - 4x_7 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & + & 3x_5 & + & 6x_6 & + & 2x_7 & \leq & 17 \\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & + & 2x_6 & + & 5x_7 & \leq & 18 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_7 \in \{0, 1\}$$

Die Startlösung sei $x = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^T$.

(a) Sei $t_0 = 3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Nachbar aus N_3 bei Simulated Annealing akzeptiert, wenn die 2., 5. und 7. Komponente geändert werden?

(b) Sei $t_0 = 5$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Nachbar aus

N_4 bei Simulated Annealing akzeptiert, wenn die 1., 5., 6. und 7. Komponente geändert werden?

(c) Sei $t_0 = 0.1$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Nachbar aus N_1 bei Simulated Annealing akzeptiert, wenn die 2. Komponente geändert wird?

5. Gegeben sei das folgende binäre Optimierungsproblem:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 \to \min!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & \geq & 12 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & \geq & 14 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$$

Die Startlösung sei $x = (1, 0, 1, 1, 1)^T$.

(a) Führen Sie zwei Iterationen von x mittels Tabu Suche (ohne Aspiration Kriterium) aus, wobei als Nachbarschaft N_2 gewählt wird und in jeder Iteration der beste Nachbar aus $Cand(x)$ als Startlösung für die nachfolgende Iteration verwendet wird.

(a) Führen Sie drei Iterationen von x mittels Tabu Suche (ohne Aspiration Kriterium) aus, wobei als Nachbarschaft N_1 gewählt wird und in jeder Iteration der beste Nachbar aus $Cand(x)$ als Startlösung für die nachfolgende Iteration verwendet wird.

6. Gegeben sei das folgende ganzzahlige (nichtlineare) Optimerungsproblem:

$$4x_1^2 + 8x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + 3\sqrt{x_4} + x_5^{3/2} + 2x_6 \to \max!$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcl} x_1 \cdot x_2 & \leq & 25 \\ x_3 + x_4 & \geq & 15 \\ x_5 + 2x_6 & \leq & 15 \end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+$$

In einem genetischen Algorithmus bezeichne das i-te Gen den Wert der Variablen x_i. Seien $x^1 = (3, 5, 6, 10, 7, 4)^T$ und $x^2 = (4, 6, 8, 9, 4, 3)^T$ die ausgewählten Eltern. Zur Erzeugung der Nachkommen wird zunächst ein (3,5)-Crossover und danach als Mutationen im ersten Chromosom die sechste Komponente um 1 vergrößert und im zweiten Chromosom die zweite Komponente um 1 verkleinert. Wählen Sie aus den zwei Eltern und den zwei erzeugten Nachkommen die zwei Chromosomen mit der besten Fitness aus.